Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

Електронске лекције о применама одређеног интеграла за ученике средње школе креиране коришћењем програмског пакета ГеоГебра

Ментор: др Мирослав Марић

Студент: Јована Ристић

Београд, септембар 2023.

Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

Електронске лекције о применама одређеног интеграла за ученике средње школе креиране коришћењем програмског пакета ГеоГебра

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић

др Бранислав Ранђеловић

Београд, септембар 2023.

Садржај

1. Увод

Одређени интеграл је концепт у математици који се широко примењује у разним областима. Он омогућава израчунавање површине испод криве, дужине криве, волумена ротационог тела и решавање многих других проблема који се сусрећу у математичкој анализи, физици, инжењерингу и економији и другим наукама.

Одређени интеграл се користи за израчунавање вредности функције на одређеном интервалу. Овај интеграл се често користи за израчунавање површине испод криве функције. На пример, можемо користити одређени интеграл да бисмо израчунали површину фигура правоугаоника, троугла или елипсе. Такође се може користити за израчунавање површине испод криве функције која није елементарна функција.

Одређени интеграл такође има примену у рачунању дужине криве. Помоћу овог интеграла можемо израчунати укупну дужину криве линије која се не може једноставно изразити помоћу основних геометријских формула. Ово је посебно корисно у физици и инжењерингу, где се често сусрећемо са кривим линијама као што су путање пројектила или криве у електромагнетној теорији.

Друга важна примена одређеног интеграла је у израчунавању запремине ротационих тела. Користећи овај интеграл, можемо израчунати запремину ротационих фигура које настају ротирањем одређене криве око одређене осе. Ово је корисно у физици, посебно при проучавању ротационих тела попут ваљка или купа.

Осим наведених примера, одређени интеграл се користи у многим другим областима. У економији се користи за израчунавање укупних прихода или укупне потрошње на основу функција. У физици се користи за израчунавање масе, центра масе и момента инерције.

Укратко, примена одређеног интеграла је широка и разноврсна. Овај математички концепт омогућава нам да решимо проблеме везане за површине, дужине, запремине и многе друге квантитативне карактеристике различитих облика. Без њега, многе од ових проблема би биле тешко или немогуће решити на прецизан начин.

ГеоГебра је програмски пакет који је посебно осмишљен за наставу и учење математике. У њему се комбинују алати за геометрију, алгебру, анализу, статистику и нумерику, омогућавајући корисницима да истражују математичке концепте на интерактиван начин. Такође, омогућава визуализацију математичких објеката, као што су функције, графици, криве, троуглови, кругови и други геометријски облици.

Једна од кључних карактеристика ГеоГебре је њена динамичка природа. То значи да се промене у једном делу конструкције аутоматски одражавају на све друге повезане делове. Ово омогућава ученицима да експериментишу са различитим параметрима и да визуализују како се то одражава на графике и решења математичких проблема.

Овај програмски пакет има богат сет алата за извођење различитих математичких операција, као и за креирање интерактивних анимација и презентација. Ово чини наставу математике занимљивијом, интерактивнијом и прилагодљивијом различитим стиловима учења.

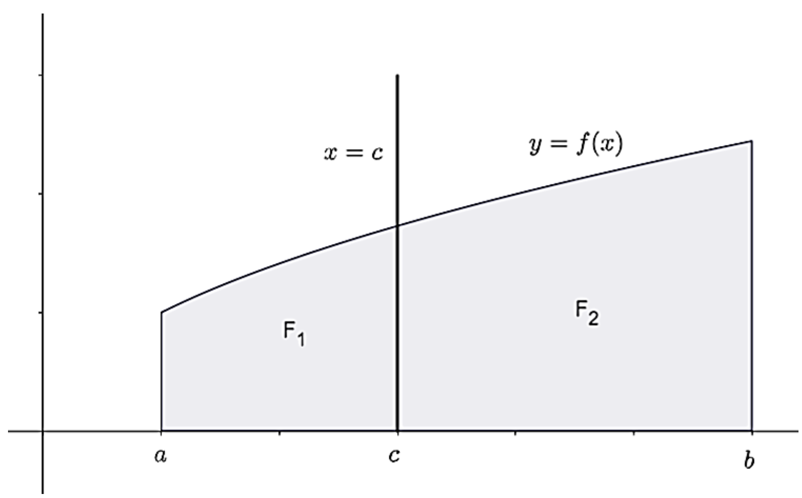
ГеоГебра је бесплатан софтвер који је доступан за различите платформе, укључујући рачунаре, паметне телефоне и таблете. Програмски пакет је написан у објектно-оријентисаном језику Java. Овај математички софтвер је осмислио и развио Маркус Хохенвартер, аустријски математичар и рачунарски програмер. Развој ГеоГебрине прве верзије започео је 2001. године, док је прва јавно доступна верзија објављена 2002. године.

2. Одређени интеграл

2.1. Мотивација за увођење одређеног интеграла

Иако се појам одређеног интеграла ослања на појам извода, он историјски настаје пре њега. Поједини проблеми из физике и геометрије воде до појма одређеног интеграла. Овде ће бити размотрен проблем површине. Потребно је прво дефинисати фигуру која се зове криволинијски трапез. Криволинијски трапез је фигура у равни која је ограничена са три дужи и једним луком непрекидне криве, при чему су две од тих дужи паралелне, а трећа на њих нормална и праве које су паралелне имају са луком криве највише једну заједничку тачку. У специјалном случају једна или обе од паралелних дужи могу да се сведу на по једну тачку и тада се добија криволинијски троугао, односно криволинијски одсечак. Поједнне фигуре у равни биће могуће разложити на неколико криволинијских трапеза или троуглова, али постоје и оне које није могуће разложити на овај начин. Уколико је фигуру F могуће разложити на две фитуре F_1 и F_2 са дисјунктним унутрашњим областима и ако те фигуре имају површине $P(F_1)$ и $P(F_2)$ онда ће површина фигуре F бити:

$$P(F) = P(F_1) + P(F_2).$$

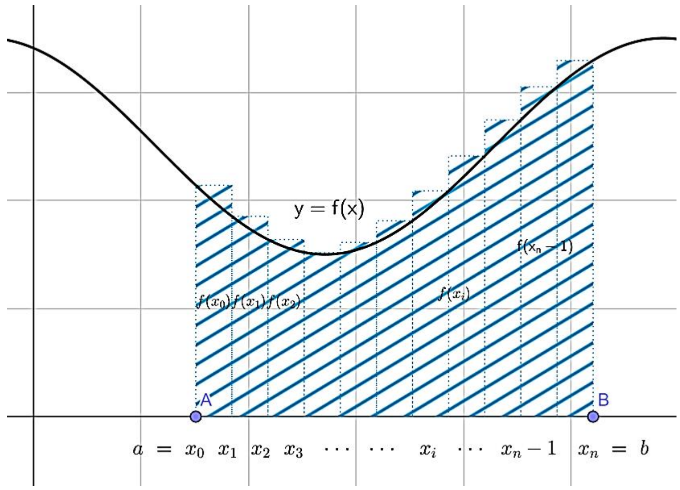


Слика 2.1.1. Површина криволинијског трапеза

2.2. Увођење одређеног интеграла

Предмет изучавања у овом одељку биће појам одређеног интеграла. Навешћемо најпре неке проблеме из геометрије и физике који доводе до овог појма. Историјски гледано, први проблем у чијем решавању је коришћен појам одређеног интеграла био је проблем одређивања површине равне фигуре. Сада ћемо говорити о рачунању површина фигура општијег типа. При томе ћемо се ослонити на интуитивну представу о површини, да се не бисмо упуштали у разматрање питања дефинисања и егзистенције површине произвољне равне фигуре. Налажење површина многих равних фигура може се свести на налажење површина тзв. криволинијских трапеза. Криволинијским трапезом у равни $0xy$ називамо сваку фигуру која је ограничена неком кривом $y = f(x), x \in [a, b]$, правим линијама $x = a$ и $x = b$ и x-осом (Слика 2.2.1.). Притом се претпоставља да је функција f непрекидна и да је $f(x) \geq 0$ за $x \in [a, b]$. Површина такве фигуре приближно се може израчунати на следећи начин.

Поделимо одсечак $[a, b]$ на n делова тачкама $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и $x_0 = a, x_n = b$, при чему је $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ (Слика 3.2.). Ако кроз подеоне тачке повучемо праве паралелне са y-осом, поделићемо полазни криволинијски трапез на n мањих криволинијских трапеза. Заменимо сваки од ових трапеза једним правоугаоником, узимајући за „основицу“ правоугаоника одсечак над којим је уочени криволинијски трапез конструисан, а за „висину” ординату тачке на кривој која одговара, рецимо, левом крају одсечка. Тако смо цео полазни криволинијски трапез заменили „степенастом“ фигуром састављеном од n правоугаоника, чије „основице“ су одсечци $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, а „висине“ су им једнаке $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$ (Слика 2.2.1.). Површина P криволинијског трапеза приближно је једнака збиру површина ових правоугаоника:



Слика 2.2.1. Збир површина горњих и доњих сума

$$P \approx f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i,$$

при чему је са Δx_i означена разлика $x_{i+1} - x_i$ за $i = 0,1,2, \dots, n-1$. Што су подеоци одсечка $[a, b]$ мањи, то је збир површина правоугаоника ближи површини криволинијског трапеза. Зато ће збир површина правоугаоника тежити површини криволинијског трапеза кад дужине свих подељака теже нули, прецизније, кад дужина највећег подељка тежи нули. Ако дужину највећег подељка поделе одсечка од $[a, b]$ остварене тачкама $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (то је, у ствари, произвољна подела одсечка $[a, b]$) обележимо са λ, горњи закључак о површини P криволинијског трапеза можемо записати овако:

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i. \qquad (2.1.)$$

Истакнимо да сваки сабирак у суми $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ тежи нули кад λ тежи нули, а да при том број сабирака n тежи бесконачности. Изражавајући се слободније, можемо рећи да релација (2.1.) показује да је површина P криволинијског трапеза једнака збиру бесконачно много бесконачно малих величина. До разматрања граничних вредности сума типа (2.1.) доводе и неки проблеми из физике, од којих ћемо овде навести два - проблем пута и проблем рада. Проблем пута састоји се у следећем: тело се креће праволинијски промењљивом брзином и позната је зависност његове брзине v од времена t: $v = f(t)$. Треба израчунати дужину пута s који тело пређе од тренутка $t = a$ до тренутка $t = b$. Да бисмо дужину пута израчунали приближно, можемо временски интервал $[a, b]$ поделити на n мањих интервала тачкама $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ и $t_0 = a, t_n = b$, при чему је $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$, и узети да је на сваком од тих мањих интервала брзина v приближно константна. Наиме, на i-том интервалу $[t_i, t_{i+1}]$ брзина је приближно једнака брзини, на пример, у тренутку

$t = t_i$: $v \approx f(t_i)$, за $i = 0,1,2,\ldots,n-1$. На основу тога, пут пређен у току i-тог временског интервала приближно је једнак $f(t_i)\Delta t_i$, где је $\Delta t_i = l_{i+1} - l_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, а цео пут s приближно је једнак збиру оваквих производа, односно:

$$s \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t_i.$$

Као и код површине криволинијског трапеза, и овде се тачна вредност тражене величине добија као гранична вредност горње суме, кад дужина λ највећег подељка тежи нули:

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta t_i.$$

У проблему рада разматра се кретање неког тела дуж x-осе, под дејством променљиве силе F сталног правца, који се поклапа са правцем x-осе. Позната је зависност силе F од апсцисе x тачке на x-оси: $F = f(x)$, што значи да на њега делује сила F једнака $f(x)$, кад се тело нађе у тачки са апсцисом x.

Треба одредити количину рада који изврши сила F дуж одсечка $[a,b]$ на x-оси. Знамо да је рад који изврши нека константна сила F на путу дужине s једнак $F \cdot s$. Поделимо одсечак $[a,b]$ неким тачкама $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и $x_0 = a$, $x_n = b$, где је $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$. Тако ћемо добити n мањих одсечака: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. На сваком од ових одсечака сила F је приближно константна и приближно једнака, нпр. вредности у левом крају одсечка, тј. на i-том одсечку $[x_i, x_{i+1}]$ је $F \approx f(x_i)$, за $i = 0,1,2,\ldots,n-1$. Зато је рад на i-том одсечку приближно једнак:

$$f(x_i)\Delta x_i (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i) \text{ за } i = 0,1,2,\ldots,n-1,$$

а рад L на целом одсечку $[a,b]$ приближно једнак збиру оваквих производа, односно:

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

Кад дужина λ највећег подељка поделе тежи нули, горња сума тежи ка L:

$$L = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i.$$

Видели смо да се површина криволинијског трапеза и дужина пута који тело пређе крећући се праволинијски, као и количина рада који изврши сила на праволинијском путу, могу израчунати помоћу граничних вредности сума типа (2.1.). Зато је оправдано да се приступи изучавању таквих граничних вредности сума или, како је раније већ речено, сума од бесконачно много бесконачно малих величина, независно од њихове интерпретације. У том смислу за сваку од њих употребљава се назив одређени интеграл. У наставку уводимо дефиницију одређеног интеграла и укратко разматрамо питане његове егзистенције.

Дефиниција 1. Нека је f функција дефинисана и ограничена на одсечку $[a, b]$. Нека је:

$$P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

подела одсечка $[a, b]$ и нека је у сваком подељку ове поделе на произвољан начин изабрана по једна тачка, тј. нека је у i-том подељку $[x_i, x_{i+1}]$ узета тачка ξ_i за $i = 0,1,2, \dots, n-1$. Збир

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_{i+1} - x_i),$$

назива се интегралном сумом функције f која одговара подели P и одређеном избору тачака ξ_i. Обележимо са λ дужину највећег подељка поделе P, то јест највећи од бројева $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = 0,1,2, \dots, n-1$. Ако постоји гранична вредност интегралне суме σ кад λ тежи нули и ако је та гранична вредност једнака броју I, то јест ако је:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I,$$

(независно од начина бирања тачака ξ_i) тада број I називамо одређеним интегралом функције f на одсечку $[a, b]$ и означавамо га са:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{(„интеграл од } a \text{ до } b\text{“).}$$

За функцију f кажемо тада да је интеграбилна на одсечку $[a, b]$.

Треба објаснити гранични процес коришћен у горњој дефиницији, то јест ближе одредити значење реченице: „Интегрална сума σ тежи броју I кад λ тежи нули, независно од начина бирања тачака ξ_i“. Кажемо да $\sigma \to I$ кад $\lambda \to 0$, независно од избора тачака ξ_i ако за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ такав да је $|\sigma - I| < \varepsilon$, чим је подела P таква да је $\lambda < \delta$, при чему начин бирања тачака ξ_i остаје произвољан. Ово се може изразити и на други начин, помоћу низова. Ако узмемо један бесконачан низ $P_k, k \in N$, подела одсечка $[a, b]$, такав да низ $\lambda_k, k \in N$, тежи нули када $k \to \infty$, па за сваку поделу извршимо неки избор тачака ξ_i, одговарајуће интегралне суме такође ће образовати низ: $\sigma_k, k \in N$. Ако постоји $\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I$, онда ће и за сваки низ подела описаног типа важити $\lim_{k \to \infty} \sigma_k = I$, било како да смо бирали тачке ξ_i. Може се доказати да важи и обрнуто.

Напоменимо још и то да смо у проблемима које смо разматрали пре увођења дефиниције одређеног интеграла, приликом формирања интегралних сума ради једноставности узимали да је $\xi_i = x_i$, за $i = 0,1,2, \dots, n-1$. Знак $\int$ у склопу ознаке одређеног интеграла представља издужено слово s, прво слово латинске речи summa, што значи збир. Иначе, цела ознака $\int_a^b f(x)dx$ одређеног интеграла одсликава структуру записа интегралне суме: уместо знака $\sum$ стоји знак $\int$, уместо $f(x_i)$ стоји $f(x)$, а уместо Δx_i стоји dx. Као и код неодређеног интеграла, израз $f(x)dx$ назива се подинтегралним изразом, а функција f подинтегралном функцијом или интеграндом. Бројеви a и b називају се доњом и горњом границом одређеног интеграла.

Једно од првих питања која треба расправити у вези са појмом одређеног интеграла свакако је питање егзистенције, тј. питање: када постоји одређени интеграл функције f на одсечку $[a, b]$. Навешћемо без доказа две теореме које дају одговоре на ово питање.

Теорема 1. Ако је функција f монотона на одсечку $[a, b]$, тада је она и интеграбилна на том одсечку.

Теорема 2. Свака функција непрекидна на одсечку $[a, b]$ интеграбилна је на том одсечку.

Сада ћемо на једном примеру показати како се могу израчунати неки одређени интеграли уз ослањање само на дефиницију и на горе наведене теореме.

Пример 1. Израчунати $\int_0^1 x^2 dx$.

Решење. Функција $f(x) = x^2$ је непрекидна и монотона на одсечку $[0,1]$, тако да $\int_0^1 x^2 dx$ постоји на основу *теореме 1* као и на основу *теореме 2*. Да бисмо овај интеграл израчунали, довољно је да размотримо само један низ подела P_n, где $n \in N$, за који низ λ_n, где $n \in N$, тежи нули и да нађемо граничну вредност низа одговарајућих интегралних сума за неки, било који, избор тачака ξ_i. Формирајмо низ подела, делећи одсечак $[0,1]$ на једнаке делове. Нека n-ти члан низа подела буде подела на n једнаких делова, то јест подела:

$$P_n: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1,$$

за $n \in N$. Уочљиво да је $\lambda_n = \frac{1}{n}$, где $n \in N$, што показује да је испуњен услов: $\lambda_n \to 0,\ n \to \infty$. Изаберимо на сваком подељку поделе P_n за тачку ξ_i десни крај подељка, тј. нека је за i-ти подељак $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, $\xi_{\mathrm{i}} = \frac{i+1}{n}$, за $i = 0,1,2, \ldots, n-1$, и $n \in N$. Одговарајућа интегрална сума σ_n једнака је:

$$\begin{aligned}\sigma_n \quad &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)^2}{n^3} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}, \text{где } n \in N.\end{aligned}$$

Дакле, како је $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{3}$, тако да је $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Напоменимо да је у току рачунања овог интеграла коришћена формула за збир квадрата првих n природних бројева: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, која је позната од раније, а иначе се доказује методом математичке индукције.

2.3. Својства одређеног интеграла

Познавање својстава одређеног интеграла веома је важно при изучавању овог појма. Навешћемо основна својства одређеног интеграла. Иако се она углавном једноставно доказују, нећемо дати њихове целовите доказе.

1° Ако је функција f интеграбилна на одсечку $[a, b]$ тада је за било који реалан број k и функција kf интеграбилна на истом одсечку и важи једнакост:

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

Ово је тзв. правило о одређеном интегралу производа константе и функције.

2° Ако су функције f и g интеграбилне на одсечку $[a, b]$, тада су и функције $f + g$ и $f - g$ интеграбилне на истом одсечку и важи једнакост:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Ово је правило о одређеном интегралу збира, односно разлике.

3° Ако постоји $\int_a^b f(x)dx$ и ако је c произвољна тачка између a и b, тј. $a < c < b$, тада постоје и интеграли $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, и важи једнакост:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Из егзистенције оба интеграла на десној страни следи егзистенција интеграла на левој страни једнакости.

Претходно наведена једнакост важи не само за назначени поредак тачака a, b и c, већ и за било који други ако је претходно проширена дефиниција одређеног интеграла и на случај кад је доња граница већа од горње. То се постиже увођењем следеће дефиниције: ако је $a < b$, тада је:

$$\int_b^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} -\int_a^b f(x)dx,$$

разуме се, под претпоставком да је функција f интеграбилна на одсечку $[a, b]$. Уз ову, обично се уводи и следећа дефиниција:

$$\int_a^a f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Овде је a произвољан реалан број, а f функција дефинисана бар у тачки a. Узмимо, на пример, да је поредак тачака a, b и c овакав: $b - a - c$. Тада, према својству 3°, постојање интеграла $\int_b^c f(x)dx$ повлачи постојање интеграла $\int_b^a f(x)dx$ и $\int_a^c f(x)dx$ и обрнуто, тако да важи једнакост:

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

која се може написати и у облику:

$$-\int_c^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx,$$

одакле следи да је:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

На сличан начин показује се да важи и за остале поретке бројева a, b и c.

4° Ако је функција f интеграбилна на одсечку $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ за $x \in [a, b]$, тада је:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Како су све разлике Δx_i ненегативне, то ће за ненегативну функцију f све интегралне суме:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i,$$

такође бити ненегативне, а онда и $\int_a^b f(x)dx$ као гранична вредност таквих интегралних сума.

5° Нека су f и g интеграбилне функције на одсечку $[a, b]$ и нека је $f(x) \geq g(x)$ за $x \in [a, b]$. Тада важи неједнакост:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Ово се лако изводи из претходног својства.

Из претпоставке $f(x) \geq g(x)$ следи да је $f(x) - g(x) \geq 0$, па је на основу својства 4°,

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0.$$

Применом својства 2°, доказали смо да важи својство 5°.

6° Ако је функција f интеграбилна на одсечку $[a, b]$, тада је и функција $|f|$ интеграбилна на истом одсечку и важи неједнакост:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

О доказивању првог дела овог тврђења, нећемо говорити. Други део, тј. сама неједнакост својства 6°, доказује се лако на основу својства 5°. Наиме, како је:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, x \in [a, b],$$

интеграцијом и применом својства 5° добија се двострука неједнакост:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

из које следи доказ својства 6°.

Пример 1. Знајући да је $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$, наћи $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx$.

Решење. Из адиционих формула нам је познато да је $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x +$ $+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$. Применом својства 1° и 2° одређеног интеграла важи:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Пример 2. Показати да је $\int_a^{b+c} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^{b+c} f(x)dx$ за било која три реална броја a, b и c таква да сви ови интеграли постоје.

Решење. Директном применом својства 3° показујемо да важи:

$$\int_a^{b+c} f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^{b+c} f(x)dx = \int_b^{b+c} f(x)dx.$$

Пример 3. Показати да је $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1} \leq 1$.

Решење. Прво ћемо одредити најмању и највећу вредност подинтегралне функције $f(x) = \frac{1}{x^4+1}$ на одсечку $[0,1]$. Како је функција x^4 је растућа, следи да је и функција $x^4 + 1$ растућа, што значи да је $\frac{1}{x^4+1}$ опадајућа функција. Зато је њена најмања вредност на одсечку $[0,1]$ једнака $f(1) = \frac{1}{2}$, а највећа $f(0) = 1$. На основу тога, важи двострука неједнакост:

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1,$$

за $x \in [0,1]$. Следи, на основу својства 5°, да је:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \int_0^1 dx.$$

Како је $\int_0^1 dx = 1$ тада важи:

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1.$$

2.4. Њутн-Лајбницова формула

Међу проблемима на које смо указали пре увођења појма одређеног интеграла био је и тзв. проблем пута. Закључак који смо тада извели у вези са овим проблемом може сада овако да се формулише: дужина пута s који тело пређе од тренутка $t = a$ до тренутка $t = b$, крећући се праволинијски, променљивом брзином v, чија зависност од времена t је позната: $v = f(t)$, једнака је следећем одређеном интегралу:

$$s = \int_a^b f(t)dt.$$

Повежимо ово са оним што је о проблему пута констатовано пре увођења појма примитивне функције и неодређеног интеграла. Допустимо да се у горњој једнакости број b мења, $b \geq a$. Тада се и пут s мења, тј. s је нека функција од b: $s = F(b), b \geq a$. Према ономе што је раније констатовано, F је једна примитивна функција функције f. Ако је G било која примитивна функција функције f, тада постоји константа C таква да је:

$$G(b) = F(b) + C, b \geq a,$$

што значи да је $F(b) = G(b) - C, b \geq a$, и $s = F(b) = G(b) - C, b \geq a$. Како је за $b = a$,

$s = \int_a^a f(t)dt = 0$, то је $G(a) - C = 0$, тј. $C = G(a)$, тако да је:

$$s = G(b) - G(a), b \geq a.$$

Ово се може записати и тако да се пут s не појави експлицитно:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

Видимо да је одређени интеграл функције f на одсечку $[a, b]$ једнак прираштају на истом одсечку било које примитивне функције G за функцију f. Оваква једнакост важи за било коју непрекидну функцију f.

Напомена: Раније је било речи о примитивним функцијама само за функцију дефинисану на неком отвореном интервалу. Ако је f функција дефинисана на одсечку $[a, b]$, онда примитивном функцијом функције f називамо сваку функцију F дефинисану на одсечку $[a, b]$, и такву да за сваку унутрашњу тачку x одсечка $[a, b]$(тј. за $x \neq a$ и $x \neq b$) постоји извод $F'(x)$ једнак $f(x)$, а у крајевима одсечка постоје десни, односно леви извод: $F'(a+0)$, односно $F'(b-0)$, једнаки $f(a)$, односно $f(b)$.

Теорема 1. Нека је f функција дефинисана и непрекидна на одсечку $[a,b]$ и нека је Φ функција дефинисана на следећи начин:

$$\Phi(\beta) = \int \beta f(x)dx, \quad \beta \in [a,b].$$

Тада је Φ једна примитивна функција функције f.

Доказ. Да бисмо доказали горњу теорему, прво ћемо приказати прираштај функције Φ у облику интеграла. Нека је $\beta \in [a,b]$ и нека је h такав број да је и $\beta + h \in [a,b]$. Када је $\beta \neq a$ и $\beta \neq b$, h може бити позитивно, негативно или нула, док за $\beta = a$ мора бити $h > 0$, а за $\beta = b$ је $h < 0$. Кад се вредност независно промењиве промени од β на $\beta + h$ и добије прираштај h, функција Φ добије прираштај $\Delta\Phi = \Phi(\beta + h) - \Phi(\beta)$ једнак:

$$\int_a^{\beta+h} f(x)dx - \int_a^{\beta} f(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+h} f(x)dx. \qquad (2.2.)$$

Последња једнакост следи из својства 3°одређеног интеграла, што је показано у примеру 2. претходног одељка. Према дефиницији извода тврдња теореме може да се искаже овако:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta\Phi}{h} = f(\beta),$$

или овако:

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{\Delta\Phi}{h} - f(\beta)\right] = 0. \qquad (2.3.)$$

При чему се подразумева да за $\beta = a$ уместо $h \to 0$ треба да стоји $h \to 0+$, а за $\beta = b - h \to 0$. Видели смо (релација 2.2.) да је $\Delta\Phi = \int_{\beta}^{\beta+h} f(x)dx$. Како је и:

$$f(\beta) = \frac{1}{h} f(\beta)h = \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} f(\beta)dx, \qquad \text{то је:}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{h} - f(\beta) = \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} [f(x) - f(\beta)]dx, (h \neq 0). \qquad (2.4.)$$

Нека је ε произвољан позитиван број. Из непрекидности функције f у тачки β следи да постоји позитиван број δ такав да за $|x-\beta| \leq |h| < \delta$ важи $|f(x) - f(\beta)| < \varepsilon$. Тада је, према једнакости (2.4.) и својству 6° одређеног интеграла, за $h > 0$:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{h} - f(\beta)\right| \leq \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} |f(x) - f(\beta)|dx \leq \frac{1}{h}\int_{\beta}^{\beta+h} \varepsilon dx = \varepsilon,$$

и слично за $h < 0$:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{h} - f(\beta)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{\beta+h}^{\beta} |f(x) - f(\beta)|dx \leq \frac{1}{|h|}\int_{\beta+h}^{\beta} \varepsilon dx = \frac{1}{|h|}\varepsilon(-h) = \varepsilon.$$

Дакле, за сваки позитиван број ε постоји позитиван број δ такав да је:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{h} - f(\beta)\right| \leq \varepsilon,$$

ако је $|h| < \delta$ $(h \neq 0)$. Овим је утврђено, по дефиницији граничне вредности, да важи (2.3.), чиме је доказ завршен.

Теорема 2. *Њутн-Лајбницова теорема*. Ако је f функција дефинисана и непрекидна на одсечку $[a,b]$ и ако је F било која њена примитивна функција, тада важи једнакост:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказ. Сагласно *теореми 1* функција $\Phi(\beta) = \int_a^\beta f(x)dx, \beta \in [a,b]$ је примитивна функција функције f. Како су F и Φ примитивне функције за исту функцију f, постоји константа C таква да је $\Phi(\beta) = F(\beta) + C$ за $\beta \in [a,b]$. С обзиром на дефиницију функције Φ, ово последње значи да је:

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) + C, \quad \beta \in [a,b].$$

Одавде се за $\beta = a$ добија $0 = F(a) + C$, односно $C = -F(a)$, па је:

$$\int_{a}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(a), \beta \in [a,b].$$

Најзад, ако се стави $\beta = b$, добија се једнакост из *теореме 2*.

При записивању процеса рачунања одређеног интеграла на описани начин користи се специјална ознака $F(x)|_a^b$ за прираштај функције F на одсечку $[a,b]$.

Пример 1. Израчунати $\int_a^b x^\alpha dx$, за $\alpha \in R$ и $a, b > 0$.

Решење. Разликоваћемо два случаја: $\alpha \neq -1$ и $\alpha = -1$. За $\alpha \neq -1$, како знамо, $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, па можемо узети на пример функцију $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ као једну примитивну функцију за x^α. Тако добијамо:

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}\Big|_a^b = \frac{1}{\alpha+1} b^{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} a^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}(b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}).$$

Ако је $\alpha = -1$, тада је реч о интегралу $\int_a^b \frac{dx}{x}$. Како је $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ за $x > 0$.

То је:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

Пример 2. Израчунати:

а) $\int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$;

б) $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$;

в) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$;

г) $\int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{5}\right)} = 5tg\,\frac{x}{5}\Big|_0^\pi = 5\left(tg\,\frac{\pi}{5} - tg\,\frac{0}{5}\right) = 5tg\,\frac{\pi}{5}$.

Приликом израде задатака, раде се таблични интеграли и врши се директна примена Њутн-Лајбницове формуле.

Пример 3. Одредити $\int_0^2 |1-x|\, dx$.

Решење. $\int_0^2 |1-x|\, dx = \int_0^1 (1-x)\, dx + \int_1^2 (x-1)\, dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^2 = 1 - \frac{1}{2} + 2 - 2 - $
$- \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

При решавању интеграла се користи својство интеграла и користи се таблица основних интеграла.

2.5. Методе интеграције код одређеног интеграла

Њутн-Лајбницова теорема пружа могућност да се при рачунању одређеног интеграла примењују методе интеграције у фази налажења одговарајућег неодређеног интеграла. Међутим, погодније је да се методе интеграције примењују директно на одређене интеграле. Њутн-Лајбницова теорема омогућава да се на једноставан начин изведу потребне формуле.

2.5.1. Метода замене

Наредна теорема показује како се у одређеном интегралу $\int_a^b f(x)dx$ уводи замена $x = \psi(t)$ и под којим условима се она може увести.

Теорема 1. Нека су испуњени следећи услови:

1° функција f је дефинисана и непрекидна на одсечку $[a, b]$;

2° функција ψ је дефинисана и непрекидна на неком одсечку $[\alpha, \beta]$ и за свако $t \in [\alpha, \beta]$ је $\psi(t) \in [a, b]$;

3° у крајевима одсечка $[\alpha, \beta]$ функција ψ узима вредности a и b $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b$;

4° за свако t на одсечку $[\alpha, \beta]$ постоји извод $\psi'(t)$ који је непрекидан. Тада важи формула:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f\big(\psi(t)\big)\psi'(t)dt. \qquad (2.5.)$$

Доказ. Из непрекидности функција f, ψ и ψ' следи да су оба интегранда у (2.5.) непрекидна, тако да оба интеграла постоје. Према Њутн-Лајбницовој теореми интеграл на левој страни у (2.5.) једнак је:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где је F једна примитивна функција функције f. Функција $\Phi(t) = F(\psi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, тада је једна примитивна функција функције $f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$ (што се лако проверава, као што смо видели доказујући својевремено теорему о замени код неодређеног интеграла), па је, опет на основу Њутн-Лајбницове теореме, интеграл на десној страни једнакости (2.5.) једнак је:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\psi(t)\big)\psi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F\big(\psi(\beta)\big) - F\big(\psi(\alpha)\big) = F(b) - F(a),$$

због ($\psi(\alpha) = a$ и $\psi(\beta) = b$). Дакле, оба интеграла у (3.18.) једнака су $F(b) - F(a)$, тако да једнакост (2.5.) заиста важи.

Напомена: Користићемо и модификацију *теореме 1* која се од те теореме разликује само у томе што у услову 3° стоји $\psi(\alpha) = b$ и $\psi(\beta) = a$ уместо $\psi(\alpha) = a$ и $\psi(\beta) = b$ и што је за интеграл на десној страни у (2.5.) доња граница β, а горња α, а све остало је исто као у *теореми 1.*

Пример 1. Израчунати интеграл $\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$.

Решење. Увешћемо смену $x = t^6$ (да би се сви корени могли „извући“), при чему ће се t мењати на одсечку $[1, \sqrt{3}]$. С обзиром на ознаке из *теореме 1* овде смо, дакле, узели да је $\psi(t) = t^6$ и $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$. Како је за $1 \le t \le \sqrt{3}$ испуњено $1 \le t^6 \le (\sqrt{3})^6 = 27$ и како је $\psi'(t) = 6t^5$, услови *теореме 1* су очигледно задовољени, па се назначена замена заиста може увести. После увођења ове замене добија се:

$$\int_1^{27} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{1+t^2}dt = 6\int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) = 6\int_1^{\sqrt{3}} dt - 6\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= 6t|_1^{\sqrt{3}} - 6arctgt|_1^{\sqrt{3}} = 6\big(\sqrt{3} - 1\big) - 6\big(arctg\sqrt{3} - arctg1\big) = 6\big(\sqrt{3} - 1\big) - 6\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 6(\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{2}.$$

Треба објаснити на који смо начин у горњем решењу дошли до одсечка $[1, \sqrt{3}]$, кад смо се већ одлучили за замену облика $x = t^6$. Разуме се да је главни циљ при бирању овог одсечка био да се постигне испуњеност услова 3° из *теореме 1*. Из $x = t^6$ следи $t = \pm\sqrt{x}$ (и обрнуто). Ако овде узмемо само знак $+$ пред кореном, учинићемо кореспонденцију између x и t узајамно једнозначном, тако да ће $x(\alpha) = 1$, односно $x(\beta) = 27$ бити еквивалентно са $\alpha = t(1)$, односно $\beta = t(27)$, што нам даје $\alpha = \sqrt[6]{1} = 1$ и $\beta = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$. Друга могућност је да се испред корена узме само знак $-$, што би нас довело до одсечка $[-\sqrt{3}, -1]$, а границе интеграла после увођења замене би тада биле -1 (доња) и $-\sqrt{3}$ (горња), објашњено у напомени после доказа *теореме 1*.

Пример 2. Израчунати $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx$.

Решење. Разлика квадрата која стоји под кореном указује, на пример, на замену облика $x = \sin t$. Да бисмо ову замену потпуно одредили, тј. да бисмо одредили одсечак $[\alpha, \beta]$, узмимо да је $t = \arcsin x$. Тада ће за $x = 0$ бити $t = \arcsin 0 = 0$, а за $x = 1; t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Нове границе интеграла ће бити: 0 (доња) и $\frac{\pi}{2}$ (горња). (Иначе, ово није једина могућност за потпуно одређивање замене.) Како је једнакост $x = \sin t$ еквивалентна са: $t = k\pi + (-1)^k \arcsin x, k \in Z$, на располагању смо заправо имали бесконачно много могућности. Најприродније је узети да је овде $k = 0$, што је и учињено. Међутим, може се узети и нека друга вредност, нпр. $k = 1$, што би дало $t = \pi - \arcsin x$ и довело до следећих нових граница интеграла: π (доња) и $\frac{\pi}{2}$ (горња). Уведимо сада изабрану замену и имаћемо:

$$dx = \cos t dt \text{ и } \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t,$$

(јер је $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ и зато $\cos t \ge 0$), тако да ће бити:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

Задатак 1. Користећи смену промељиве израчунати интеграл $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$.

Решење.

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \{x = a\sin t\,;\ dx = a\cos t dt\,;\} = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{16}.$$

Можемо закључити да важи $\int_0^{\frac{m\pi}{2}} \sin^2 kt dt = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos^2 kt dt = \frac{m\pi}{4}$ за свако $k, m \in \mathbb{N}$.

Задатак 2. Израчунати:

а) $\int_1^9 x \cdot \sqrt[3]{1-x}dx = \left\{\begin{matrix} \text{смена:} & \\ 1-x = t^3 & x = 1 \to t = -2 \\ -dx = 3t^2dt & x = 9 \to t = 0 \end{matrix}\right\} = 3\int_{-2}^0 (1-t^3)t^3 dt =$

$$= 3\left(\int_{-2}^0 t^3 dt - \int_{-2}^0 t^6 dt\right) = 3\left(\frac{t^4}{4}\Big|_{-2}^0 - \frac{t^7}{7}\Big|_{-2}^0\right) = 3\left(0 - \frac{16}{4} - 0 + \frac{-128}{7}\right) = 3\left(-\frac{156}{7}\right) = -66\frac{6}{7};$$

Можемо уочити да поткорена функција $1 - x$ није елементарна, па самим тим не можемо таблично решити интеграл. Уводимо смену да бисмо се ослободили трећег корена. Тада добијамо подинтегралну функцију која је решива применом својстава одређеног интеграла. Увођењем смене, мењају се и границе интеграла.

б) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \begin{Bmatrix} \text{смена:} \\ 1 - x = t^2 \\ -dx = 2\mathrm{t}dt \end{Bmatrix} = 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2tgx\Big|_0^1 = 2(tg1 - tg0) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$

в) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\mathrm{ln}x} = \begin{Bmatrix} \text{смена:} & \\ \mathrm{ln}x = t & x = e \to t = 1 \\ \frac{1}{x}dx = dt & x = e^2 \to t = 2 \end{Bmatrix} = \int_1^2 \frac{1}{t}dt = \mathrm{lnt}|_1^2 = \mathrm{ln}2 - \mathrm{ln}1 = \mathrm{ln}2;$

г) $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}d(1+x) = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right);$

д) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx = \begin{Bmatrix} \text{смена:} & \\ e^x - 1 = t & x = 0 \to t = 0 \\ e^x dx = dt & x = 1 \to t = e \end{Bmatrix} = \int_0^e t^4 dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^e = \frac{e^5}{5}.$

2.5.2. Метода парцијалне интеграције

Треба да прикажемо још једну методу интеграције код одређеног интеграла - методу парцијалне интеграције (што и није неочекивано с обзиром на аналогију са неодређеним интетралом).

Теорема 2. Нека су функције u и v непрекидне на одсечку $[a, b]$ и нека имају непрекидне изводе $u'(x)$ и $v'(x)$ за $x \in [a, b]$. Тада важи формула:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Доказ. По претпоставци, постоје изводи $u'(x)$ и $v'(x)$. Према теореми о изводу производа, функција $u(x)v(x)$ такође има извод и он је једнак:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

за свако $x \in [a, b]$. Ову једнакост ћемо написати мало другачије:

$$u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x).$$

Како су, по претпоставци, функције u, v, u' и v' непрекидне на $[a, b]$, то су и све функције које фигуришу у последњој једнакости непрекидне на $[a, b]$, па су, према томе, и интеграбилне. Ако изједначимо интеграл леве и интеграл десне стране на одсечку $[a, b]$ и ако узмемо у обзир да је интеграл разлике једнак разлици интеграла, добићемо:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b [u(x)v(x)]'dx - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Како је, сагласно са Њутн-Лајбницовом теоремом:

$$\int_a^b [u(x) \vee (x)]'dx = [u(x)v(x)]|_a^b,$$

То је:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

што је и требало доказати. Формула за парцијалну интеграцију код одређеног интеграла обично се скраћено записује на следећи начин:

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu,$$

слично као и код неодређеног интеграла. Примена методе парцијалне интеграције код одређеног интеграла у свему тече исто као и код неодређеног, изузев што код одређеног треба да се пишу и границе, што доводи до тога да се, упоредо са рачунањем интеграла $\int_a^b vdu$, израчунава и прираштај $(uv)|_a^b$.

<u>*Пример 3.*</u> Израчунати $\int_1^2 x^3 e^{x^2} dx$.

<u>*Решење.*</u> Прво треба увести замену $x^2 = t$. Можемо уочити да су услови из теореме 1 испуњени, без решавања горње једнакости по x. Специјално, услов 2° је испуњен јер је извод $t' = 2x$ различит од нуле, пошто је $1 \leq x \leq 2$. Како је за предложену замену $2xdx = dt$ и $t(1) = 1, t(2) = 4$, то ће бити:

$$\int_1^2 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 te^t dt.$$

Ради израчунавања овог последњег интеграла применићемо методу парцијалне интеграције, и то тако што ћемо ставити $u = t$ и $dv = e^t dt$, одакле је $du = dt$ и $v = e^t$.

$$\int_1^4 te^t dt = (te^t)|_1^4 - \int_1^4 e^t dt = 4e^4 - e - e^t|_1^4 = 3e^4.$$

<u>*Пример 4.*</u> Израчунати граничну вредност $\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x} dx$.

<u>*Решење*</u>. Најпре рачунамо сам интеграл:

$$\int_0^b e^{-x} dx = -e^{-x}|_0^b = 1 - e^{-b} (b > 0),$$

а затим тражену граничну вредност:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{e^b}\right) = 1.$$

Напомена: Гранична вредност коју смо нашли у примеру 4 назива се несвојственим интегралом од 0 до $+\infty$ и обележава се $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. Уопште, несвојствени интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дефинише се као гранична вредност одређеног интеграла: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$. Потпуно аналогно се дефинише и несвојствени интеграл од $-\infty$ до b:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

као и интеграл од $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

<u>*Задатак 1*</u>. Користећи парцијалну интеграцију решити следеће интеграле $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \mathrm{arctg} x dx$.

<u>*Решење.*</u>

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \mathrm{arctg} x dx = \begin{Bmatrix} u = \mathrm{arctg} x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2} \mathrm{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} d\,x + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{arctg} x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приликом увођења парцијалне интеграције, за u узимамо $\mathrm{arctg}x$ јер не можемо да га интегралимо. Примењујемо формулу парцијалне интегарције и границе остају непромењене. Након примене парцијалне интеграције добијамо интеграл $\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2dx}{1+x^2}$ који решавамо посебно, неком другом методом.

<u>*Задатак 2.*</u> Израчунати интеграл $I = \int_1^e (x\ln x)^2\, dx$.

<u>*Решење.*</u> Сменом парцијалне интеграције $x^2dx = dv,\ \ln^2 x = u, \frac{2\ln x}{x}dx = du$ следи:

$$I = \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 \ln x dx.$$

Посебно израчунавамо $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx$. Тако што користимо смену парцијалне интеграције $x^2dx = dv$, $\ln x = u, v = \frac{x^3}{3}, \frac{dx}{x} = du$. Применом долазимо до израза:

$$I_1 = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.$$

Коначно добијамо да је $I = \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} = \frac{5e^3-2}{27}$.

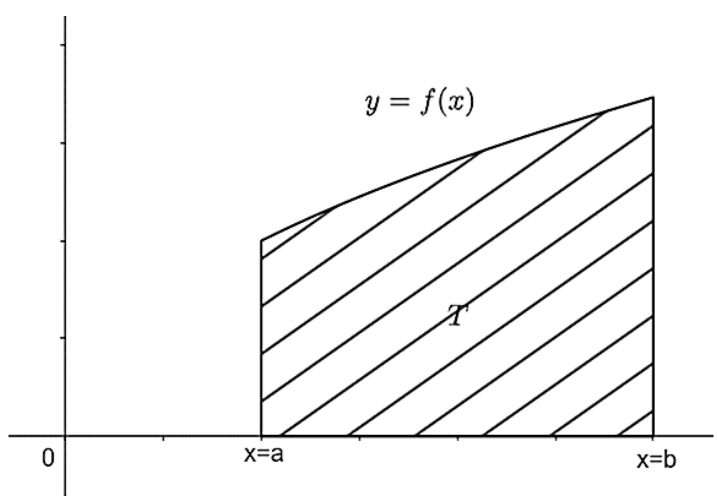
3. Примена одређеног интеграла

3.1. Површина фигуре у равни – квадратура

Када смо размотрили проблем површине криволинијског трапеза, пре увођења појма одређеног интеграла, констатовали смо да је површина криволинијског трапеза једнака граничној вредности сума специјалног типа. Имајући у виду дефиницију одређеног интеграла сада можемо у тим специјалним сумама препознати интегралне суме, додуше не било какве, већ добијене бирањем тачака ξ_i тако да се ξ_i у i-том подељку уочене поделе поклапа са левим крајем тог подељка. Међутим, кад одређени интеграл постоји, нпр. кад је функција f непрекидна, тада начин бирања тачака ξ_i није битан, тј. за све изборе се добија иста гранична вредност интегралних сума. То значи да је у таквом случају површина криволинијског трапеза једнака одређеном интегралу функције f на уоченом одсечку $[a,b]$. Формулисаћемо овај закључак као теорему.

<u>*Теорема 1.*</u> Нека је функција f дефинисана и непрекидна на одсечку $[a,b]$ и нека је $f(x) \geq 0$ за $x \in [a,b]$. Тада је површина P криволинијског трапеза испод криве $y = f(x)$, над одсечком $[a,b]$, једнака одређеном интегралу функције f на одсечку $[a,b]$, односно:

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$



Слика 3.1. Површина криволинијског трапеза

Ова теорема даје геометријску интерпретацију одређеног интеграла. На слици 3.1. приказан је један криволинијски трапез T у равни Oxy. Говорећи о површини криволинијског трапеза као важном специјалном случају површине равне фигуре, нисмо се упуштали у разматрање питања дефинисања и егзистенције површине равне фигуре.

Полазећи од појма површине полигона као познатог појма, површину произвољне равне фигуре дефинишемо на следећи начин: нека је F једна равна фигура. За сваки полигон U садржан у тој фигури рећи ћемо да је у њу уписан, а за полигон V који садржи, обухвата фигуру F рећи ћемо да је око ње описан. Ако за неку фигуру F постоји један низ уписаних полигона U_n, и један низ описаних полигона $V_n, n \in N$, тако да разлика повшине n-тог описаног и површине n-тог уписаног полигона тежи нули кад n тежи бесконачности, тј. да је:

$$\lim_{n \to +\infty} [P(V_n) - P(U_n)] = 0,$$

тада кажемо да постоји површина фигуре F, или да F има површину. Тада се доказује да низови $P(U_n)$, $n \in N$, и $P(V_n), n \in N$, (низ површина уписаних и низ површина описаних полигона, теже истом броју $P(F)$, као и да тај број не зависи од низа уписаних, нити од низа описаних полигона. То значи, ако су $M_n, n \in N$, и $S_n, n \in N$, неки други низ уписаних и неки други низ описаних полигона за фигуру F, и ако је испуњен услов:

$$\lim_{n \to \infty} [P(S_n) - P(M_n)] = 0,$$

тада и низови $P(S_n), n \in N$, и $P(M_n), n \in N$, теже броју $P(F)$. Број $P(F)$ назива се површином фигуре F.

Пример израчунавања површине фигуре помоћу површина уписаних и описаних полигона ученици су већ срели код површине кружне површи. Тада су у кружницу уписивани и око ње описивани правилни полигони са све већим бројем страница и показано је да низ површина уписаних и низ површина описаних правилних полигона теже истом броју, површини кружне површи.

Може се доказати да површина, дефинисана на описани начин, има следећа важна својства:

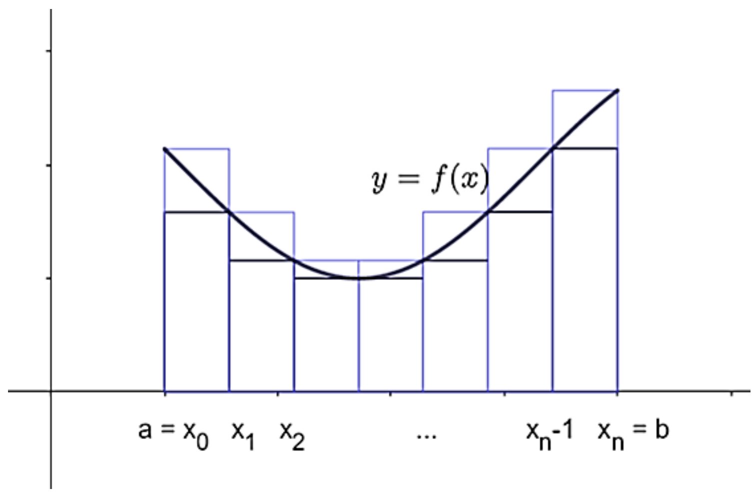
1) површина било које фигуре је ненегативан број, ако постоји;

2) ако су неке две фигуре подударне и ако једна од њих има површину, тада је има и друга и површине тих фигура су једнаке;

3) ако је нека фигура F збир фигура F_1 и F_2 (тј. ако је $F = F_1 \cup F_2$ и $F_1 \cap F_2 = 0$) и ако F_1 и F_2 имају површине, тада и F има површину, и то једнаку збиру површина фигура F_1 и F_2.

Специјално, што се тиче површине криволинијског трапеза T у равни Oxy, испод криве $y = f(x)$, над одсечком $[a, b]$ (на x-оси), под претпоставком да је функција f непрекидна на одсечку $[a, b]$, низ уписаних и низ описаних полигона за T могу се формирати на следећи начин:

Нека је P_n подела одсечка $[a, b]$, нпр. на n једнаких делова, остварена тачкама $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Као n-ти уписани полигон U_n узмимо унију тзв. уписаних правоугаоника, а као n-ти описани полигон V_n унију тзв. описаних правоугаоника. При том под уписаним, односно описаним правоугаоником за i-ти подељак $[x_i, x_{i+1}]$ подразумевамо правоугаоник чија је „основица“ одсечак $[x_i, x_{i+1}]$, „висина“ је једнака најмањој, односно највећој вредности функције f на одсечку $[x_i, x_{i+1}] (i = 0,1,2, \dots, n-1)$ (Слика 3.2.).



Слика 3.2. Описани и уписани правоугаоници

Према једној теорији о непрекидним функцијама функција f узима своју највећу вредност на одсечку $[x_i, x_{i+1}]$ у некој тачки ξ_i, и своју највећу вредност у некој тачки η_i, $i = 0,1,2, \dots, n-1$. Одатле следи да је:

$$P(U_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

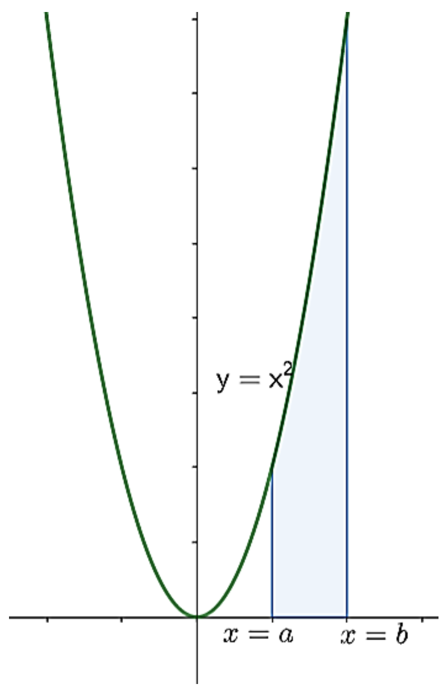
$$P(V_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i)\Delta x_i,$$

за $n \in N$. На тај начин, површине $P(U_n)$ и $P(V_n)$ једнаке су неким интегралним сумама функције f на одсечку $[a, b]$. Како функција непрекидна на неком одсечку мора бити и интеграбилна на том одсечку, то горње интегралне суме, $P(U_n)$ и $P(V_n)$, теже интегралу $\int_a^b f(x)dx$, кад $n \to \infty$. Дакле, криволинијски трапез T има површину и она је једнака $\int_a^b f(x)dx$.

Пример 1. Израчунати површину фигуре ограничене параболом $y = x^2$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$.

Решење. Фигура о којој је реч је један криволинијски трапез (Слика 3.1.1.). Зато је њена површина P, према ономе што је горе наведено:

$$P = \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$



Слика 3.1.1. Криволинијски трапез ограничен правама $x = a$ и $x = b$

Пример 2. Израчунати површину фигуре F ограничене кривим линијама $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.

Решење. Треба најпре нацртати дате криве и наћи апсцисе њихових пресечних тачака да би се видело какав је положај фигуре F у равни Oxy. Криве су приказане на слици 3.1.2., а апсцисе њихових пресечних тачака наћи ћемо решавањем система њихових једначина:

$$y = \ln x, y = \ln^2 x,$$

што се своди на решавање једначине $\ln x - \ln^2 x = 0$, односно $\ln x(1 - \ln x) = 0$.

Ова једначина еквивалентна је дисјункцији:

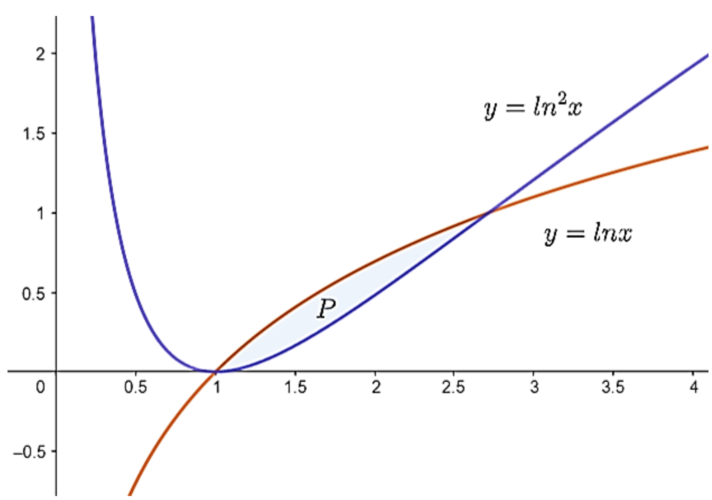
$$\ln x = 0 \vee 1 - \ln x = 0,$$

а како је $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ и $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, то су апсцисе пресечних тачака једнаке 1 и e. Сада је јасно да се површина фигуре F може израчунати овако:

$$P(F) = \int_1^e (\ln x - \ln^2 x)dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x - \ln^2 x, & dv = dx \\ du = \dfrac{1 - 2\ln x}{x}dx, & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= [(\ln x - \ln^2 x)x]|_1^e - \int_1^e (1 - 2\ln x)dx = \left\{ \begin{matrix} u = 1 - 2\ln x, & dv = dx \\ du = -\dfrac{2dx}{x}, & v = x \end{matrix} \right\} =$$

$$= -(1 - 2\ln x)x|_1^e + 2\int_1^e dx = e + 1 - 2(e - 1) = 3 - e.$$



Слика 3.1.2. Фигура ограничена кривим линијама $y = ln x$ *и* $y = ln^2 x$

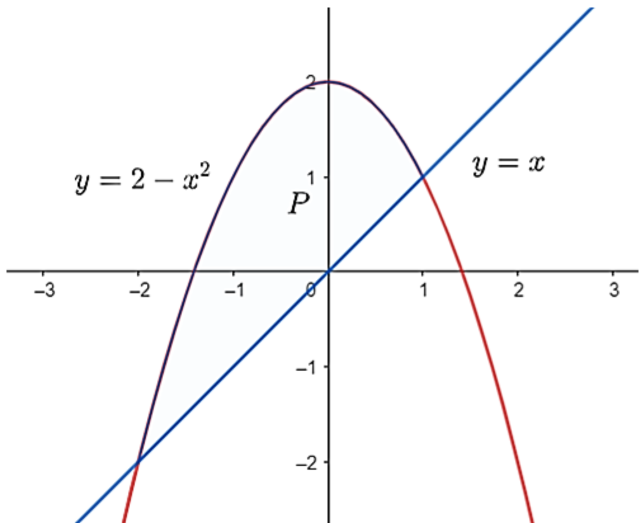
Пример 3. Израчунати површину фигуре ограничене правом $y = x$ и параболом $y = 2 - x^2$.

Решење. Нађимо апсцисе пресечних тачака праве и параболе решавањем система једначина:

$$y = x, y = 2 - x^2.$$

Када смо решили систем, добили смо $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$ (Слика 3.1.3.). То ће и бити границе интеграције. Тражена површина је:

$$P = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$



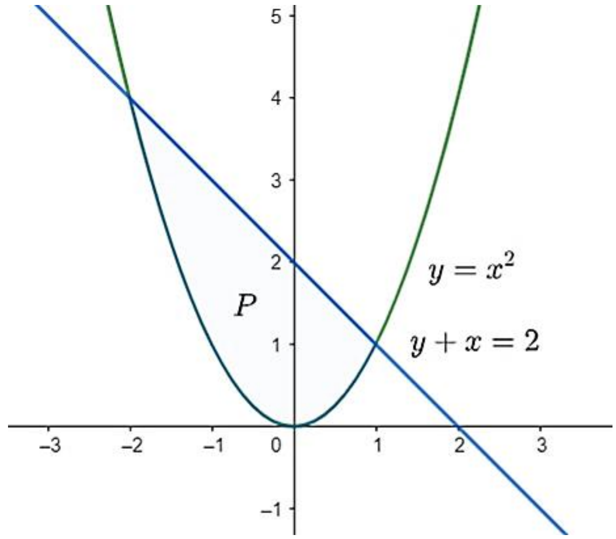
Слика 3.1.3. Фигура ограничена правом $y = x$ и параболом $y = 2 - x^2$

Задатак 1. Израчунати површину фигуре ограничене параболом $y = x^2$ и правом $y + x = 2$.

Решење. На самом почетку задатка треба одредити границе, тачније апсцисе пресечних тачака дате параболе и праве. Решавањем система $y = x^2$ и $y = 2 - x$ добијамо тражене апсцисе $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Подинтегралну функцију формирамо тако што од једначине праве одузмемо једначину параболе.

$$P = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \int_{-2}^{1} 2dx - \int_{-2}^{1} xdx - \int_{-2}^{1} x^2dx = 2x|_{-2}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= 2\big(1 - (-2)\big) - \frac{1}{2}(1^2 - (-2)^2) - \frac{1}{3}(1^3 - (-2)^3) = \frac{9}{2}.$$

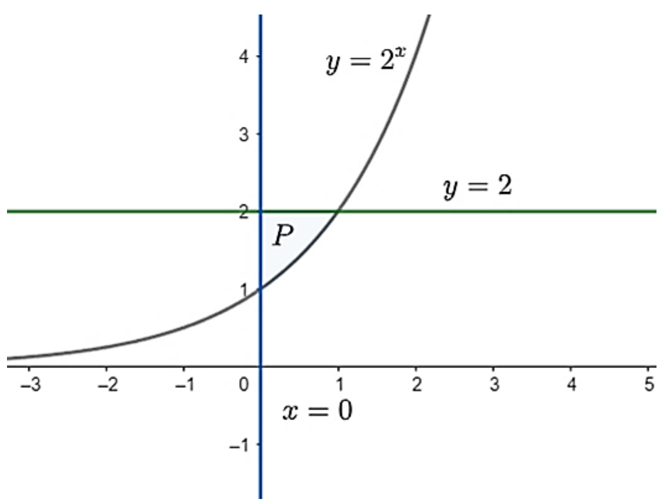


Слика 3.1.4. Фигура ограничена параболом $y = x^2$ *и правом* $y + x = 2$

<u>*Задатак 2.*</u> Израчунати површину фигуре ограничене кривом $y = 2^x$ и правама $y = 2$ и $x = 0$.

<u>*Решење*</u>. Границе настале фигуре ћемо одредити решавањем система. Систем $y = 2^x$ и $y = 2$ нам даје апсцису $x = 1$, друга апсциса је $x = 0$. Тражена површина се добија разликом једначине праве $y = 2$ и једначином експоненцијалне функције $y = 2^x$.

$$P = \int_0^1 (2 - 2^x)dx = \int_0^1 2dx - \int_0^1 2^x dx = 2x|_0^1 - \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{\ln 2}.$$



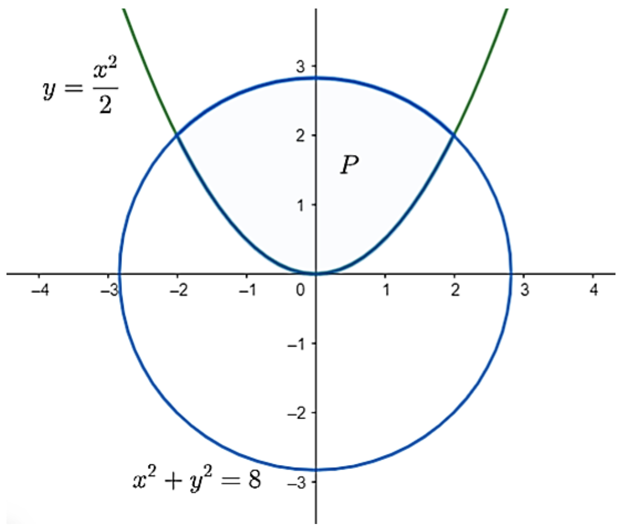
Слика 3.1.5 Површина фигуре ограничене кривом $y = 2^x$ *и правама* $y = 2$ и $x = 0$

Задатак 3. Израчунати површину фигуре ограничене кривама $y = \frac{x^2}{2}$ и $x^2 + y^2 = 8$.

Решење. Да бисмо одредили границе настале фигуре решавамо систем и добијамо да су решења: $x = 2$ и $x = -2$.

$$y^2 = 8 - x^2, y = \pm\sqrt{8 - x^2},$$

$$P = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 2\int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx - 2\int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = 2\pi + \frac{4}{3}.$$



Слика 3.1.6. Фигура ограничена кривама $y = \frac{x^2}{2}$ и $x^2 + y^2 = 8$

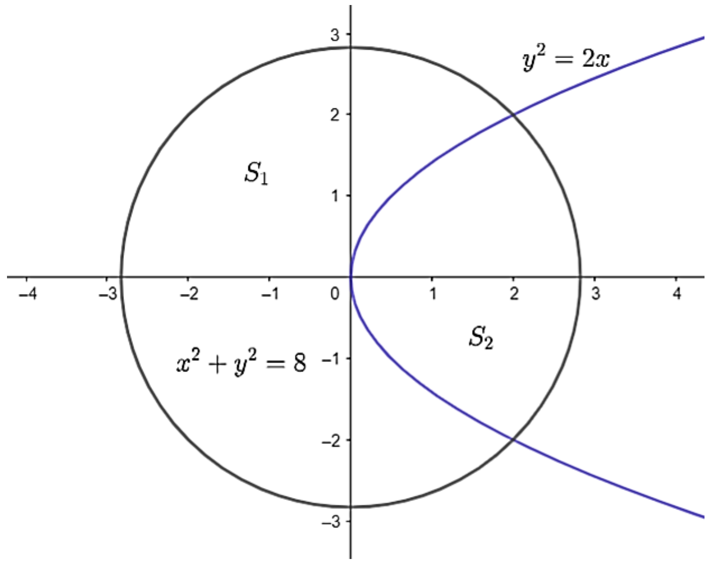
Задатак 4. У ком односу парабола $y^2 = 2x$ дели површину круга $x^2 + y^2 = 8$?

Решење. Нека је S_1површина круга, а S_2 површина коју чине параболички и кружни сегмент (Слика 3.1.7.). Очигледно, $S_1 = 8\pi$. Решавањем система једначина: $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$ добијамо апсцису $x = 2$ пресечне тачке параболе и круга. Сада је:

$$S_2 = 2\left(2\pi - \int_0^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \sqrt{2x}\right) dx\right) = 2\left(2\pi - \int_0^2 \sqrt{8 - x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2\right) =$$

$$= 2\left(2\pi + \frac{8}{3} - 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\, dt\right) = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

$$(S_1 - S_2): S_2 = \left(8\pi - 2\pi - \frac{4}{3}\right): S_2 = (9\pi - 2):(3\pi + 2).$$



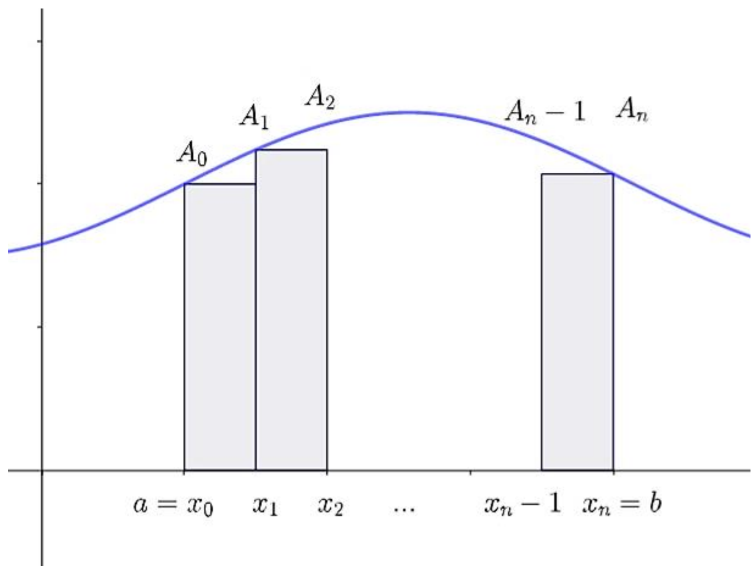
Слика 3.1.7. Парабола $y^2 = 2x$ *и кружница* $x^2 + y^2 = 8$

3.2. Дужина лука криве

Погледаћемо још како се помоћу одређеног интеграла може израчунати дужина лука криве линије у равни. Избећи ћемо и овог пута навођење дефиниције и разматрање питања егзистенције.

Нека је у равни Oxy задата крива $y = f(x)$, где је f непрекидна функција са непрекидним изводом. Уочимо лук ове криве од тачке са апсцисом а до тачке са апсцисом b (Слика 3.2.), У намери да дужину уоченог лука израчунамо приближно, поделимо сегмент $[a, b]$ на n делова тачкама $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ и повуцимо кроз деоне тачке праве паралелне оси Oy. На тај начин се разматрани лук криве подели такође на n мањих делова. Сваки од ових делова може се заменити тетивом која спаја његове крајње тачке, а његова дужина дужином те тетиве као приближном вредношћу. Израчунајмо дужину било које, i-те, од ових тетива. Њене крајње тачке су тачке са апсцисама x_i и x_{i+1} на разматраној криви, обележимо их са A_i и $A_{i+1} (i = 0,1,2, \dots, n-1)$ (Слика 3.19). Из правоуглог троугла $\Delta\ A_i A_{i+1} M_i$ непосредно се добија да је:

$$A_iA_{i+1} = \sqrt{A_iM_i^2 + A_{i+1}M_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + k_i^2\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + k_i^2}\Delta x_i,$$



Слика 3.2. Дужина лука криве

где је k_i коефицијент правца тетиве A_iA_{i+1} и $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, i = 0,1,2, \dots, n-1$. На основу геометријског тумачења појма извода, дакле, можемо писати да је $k_i = f'(\xi_i)$, а $A_iA_{i+1} = \sqrt{1 + f'(\xi_i)^2}\Delta x_i$, за $i - 0,1,2, \dots, n-1$. Како је дужина i-тог од n мањих лукова приближно једнака дужини тетиве A_iA_{i+1} као што смо већ истакли, то је дужина целог уоченог лука криве $y = f(x)$ приближно једнака збиру дужина свих таквих тетива, за $i = 0,1,2, \dots, n-1$, односно:

$$l \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'(\xi_i)\Delta x_i}.$$

Када дужина највећег подељка λ уочене поделе одсечка $[a, b]$ тежи нули, јасно је да ће горњи збир тежити, с једне стране, траженој дужини лука дате криве, а са друге стране, одређеном интегралу:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2dx},$$

јер из претпостављене непрекидности функције f' (извода функције f) следи да је функција $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ такође непрекидна, па зато и интеграбилна на одсечку $[a, b]$ Јасно је, иначе, да горњи збир представља и једну интеграбилну суму ове функције, придружену уоченој подели одсечка $[a, b]$. Према томе, важи једнакост:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Изведени закључак ћемо формулисати у облику теореме.

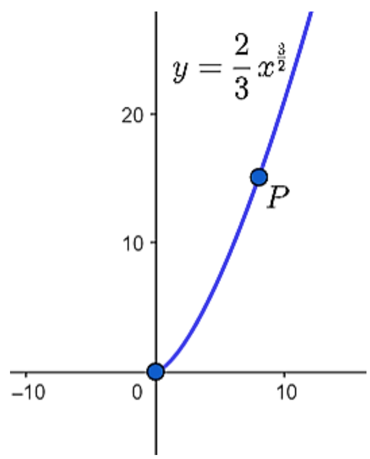
Теорема 2. Нека је у равни Oxy задата крива $y = f(x)$, где је функција f непрекидна и има непрекидан извод на одсечку $[a, b]$. Тада дужина лука l дате криве од тачке са апсцисом a до тачке са апсцисом b износи:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Пример 1. Израчунати дужину лука криве $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ од координатног почетка до тачке $\left(8, \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$.

Решење. Извод функције $y' = \frac{2}{3}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$. Непосредно на основу формуле добијамо:

$$l = \int_0^8 \sqrt{1 + (x^{1/2})^2}dx = \int_0^8 \sqrt{1 + x}dx = \int_0^8 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^8 = \frac{52}{3}.$$

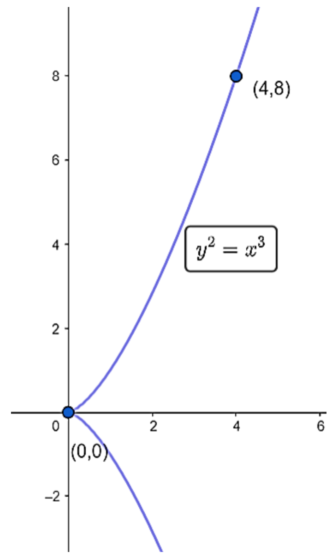


Слика 3.2.1. Дужина лука криве $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ од координатног почетка до тачке $\left(8, \frac{32\sqrt{2}}{3}\right)$

Пример 2. Израчунати дужину лука криве $y^2 = x^3$ од тачке $(0,0)$ до тачке $(4,8)$.

Решење. Прво ћемо изразити $y \Longrightarrow \ y = \pm\sqrt{x^3}$. Извод функције $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx = \left\{\begin{matrix} \text{смена:} & \\ 1 + \frac{9x}{4} = t & \text{за } x = 0 \rightarrow t = 1 \\ dx = \frac{4}{9}dt & \text{за } x = 4 \rightarrow t = 10 \end{matrix}\right\} = \frac{4}{9}\int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{4}{9}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{10} = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right).$$



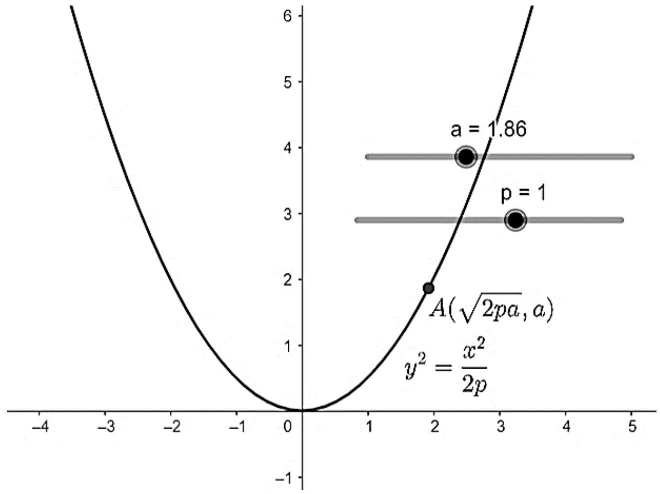
Слика 3.2.2. Дужина лука криве $y^2 = x^3$ од тачке $(0,0)$ до тачке $(4,8)$

Задатак 1. Израчунати дужину лука параболе $y = \frac{x^2}{2p}$ на интервалу $[0, a], a > 0$.

Решење.

$$l = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}dx = \frac{1}{p}\int_0^a \sqrt{x^2 + p^2}dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + p^2}\right)\right)\Bigg|_0^a =$$

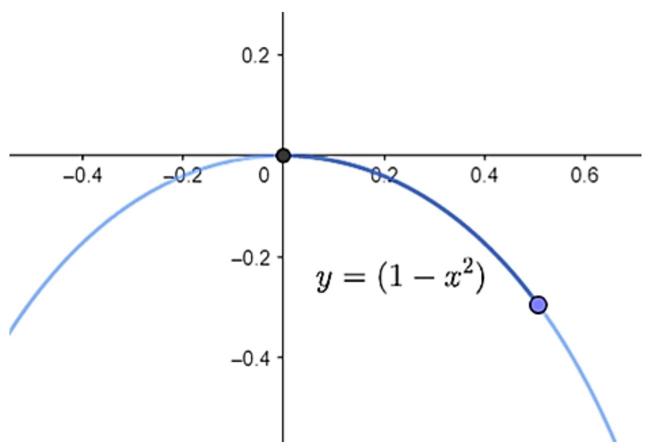
$$= \frac{a}{2p}\sqrt{a^2 + p^2} + \frac{p}{2}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + p^2}}{p}.$$



Слика 3.2.3. Дужина лука параболе $y = \frac{x^2}{2p}$ на интервалу $[0, a], a > 0$

<u>*Задатак 2.*</u> Израчунати дужину лука криве $y = ln(1 - x^2)$ за $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

<u>*Решење.*</u> $l = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = -\frac{1}{2} + \ln 3.$

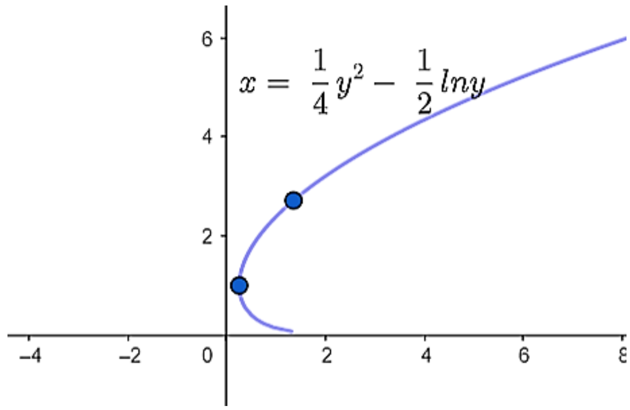


Слика 3.2.4. Дужина лука криве $y = ln(1 - x^2)$ *за* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Задатак 3. Израчунај дужину лука криве $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ за $1 \leq y \leq e$.

Решење. Приметимо да је крива облика $x = f(y)$, па се зато границе одређеног интеграла посматрају по промењљивој y.

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + x'(y)^2}dy = \int_1^e \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2} dy = \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{y} + y\right) dy = \frac{1}{2}\left(\ln y + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{4}(1 + e^2).$$

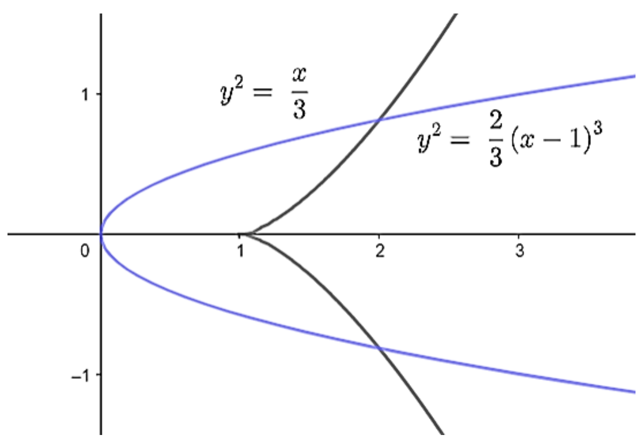


Слика 3.2.5. Дужина лука криве $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}ln y$ *за* $1 \leq y \leq e$

Задатак 4. Израчунати дужину лука дела криве $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ унутар криве $y^2 = \frac{x}{3}$.

Решење. Решавањем једначине $\frac{2}{3}(x-1)^3 = \frac{x}{3}$ добијамо $x = 2$.

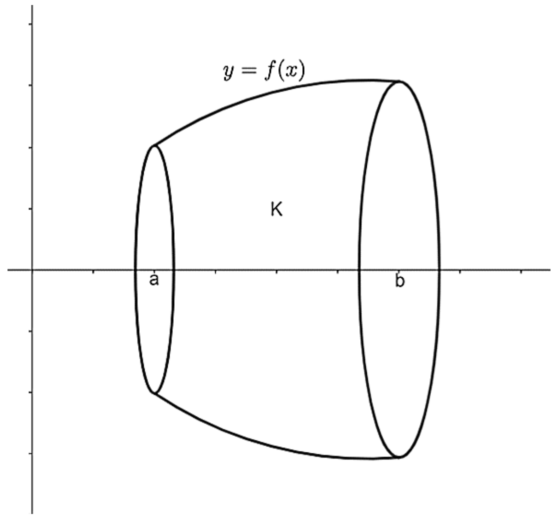
$$l = 2\int_1^2 \sqrt{1 + \frac{6}{4}(x-1)}dx = 2\int_1^2 \sqrt{\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}dx = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_1^2 \sqrt{3x-1}d(3x-1) = \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(\sqrt{5^3} - \sqrt{2^3}\right).$$



Слика 3.2.6. Дужина лука дела криве $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ *унутар криве* $y^2 = \frac{x}{3}$

3.3. Запремина обртних тела

Помоћу одређеног интеграла можемо рачунати и запремину тела. Овде ћемо се ограничити само на обртна тела.



Слика 3.3. Обртно тело које настаје ротацијом лука криве

Нека је једна функција f дефинисана и непрекидна на одсечку $[a, b]$ и нека је $f(x) \geq 0$ за $x \in [a, b]$. Обртањем око x-осе криволинијског трапеза у равни Oxy ограниченог кривом $y = f(x)$, одсечком $[a, b]$ на x-оси и правама $x = a$ и $x = b$, настаје једно обртно тело K (Слика 3.3.). Да бисмо, најпре приближно, израчунали запремину овог тела, поделимо одсечак $[a, b]$ на n делова тачкама $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. Ако кроз деоне тачке поставимо равни нормалне на x-осу, поделићемо тело К на n мањих обртних тела. Заменимо свако од ових тела по једним правим ваљком, узимајући за висину i-тог ваљка одсечак $[x_{i,} x_{i+1}]$, а да (једну) његову основу пресек тела K и равни нормалне на x-осу постављене, нпр., кроз леви крај x_i одсечка $[x_i, x_{i+1}], i = 0,1,2, \dots, n-1$. Тако смо цело обртно тело K заменили телом које се састоји од свих ваљака добијених на описани начин. Њихове висине су једнаке $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}$, а полупречници њихових основа износе $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1})$. Запремина i-тог ваљка износи $\pi f(x_i)^2 \Delta x_i$ и представља приближну вредност запремине i-тог мањег обртног тела, $i = 0,1,2, \dots, n-1$. Запремина целог тела K приближно је једнака збиру запремина свих ових ваљака:

$$V(K) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f(x_i)^2 \Delta x_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \Delta x_i.$$

Што су подеоци уочене поделе одсечка $[a, b]$ мањи, то је збир запремина ваљака ближи запремини обртног тела. Другачије речено, кад дужина највећег подеока λ тежи нули, збир запремина ваљака тежи запремини тела K:

$$V(K) = \pi \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \Delta x_i.$$

С друге стране, како је функција f непрекидна, и функција πf^2 је таква, па је интеграбилна па одсечку $[a, b]$. Збир запремина ваљака, који је у горњем тексту придружен уоченој подели одсечка $[a, b]$, која је произвољна, као приближна вредност запремине $V(K)$, то јест збир:

$$\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \Delta x_i,$$

представља истовремено и једну интегралну суму за функцију πf^2 на одсечку $[a, b]$, придружену уоченој подели одсечка. Из интеграбилности функције πf^2 сада следи да та интегрална сума тежи интегралу $\pi \int_a^b f(x)^2 dx$ кад λ тежи нули. Дакле, запремина обртног тела K једнака је овом интегралу. Формулисаћемо добијени закључак као теорему.

Теорема 3. Нека је функција f дефинисана и непрекидна на одсечку $[a, b]$ и нека је $f(x) \geq 0$ за свако $x \in [a, b]$. Тада је запремина обртног тела K, које настаје обртањем око x-осе криволинијског трапеза испод криве $y = f(x)$ над одсечком $[a, b]$ једнака:

$$V(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx \, . \qquad (3.2.)$$

Формула (3.2.) садржи одраније познате формуле за запремину правог ваљка, праве купе, зарубљене купе, лопте и делова лопте. Показаћемо како се из ње може добити позната формула за запремину лоптиног слоја.

Пример 1. Израчунати запремину лопте полупречника r.

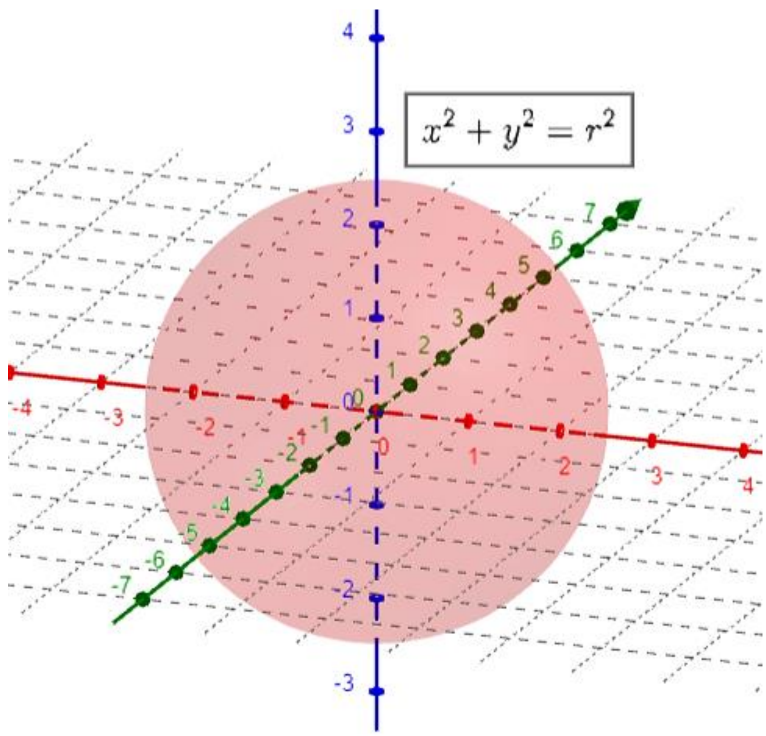
Решење. Записујемо једначину кружнице, затим изразимо променљиву y помоћу осталих променљивих, да бисмо применили формулу за запремину обртног тела. У задатку узимамо позитиван део круга и решавамо интеграл по формули.

$$x^2 + y^2 = r^2 \implies y^2 = r^2 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \implies y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\left(\int_{-r}^{r} r^2 dx - \int_{-r}^{r} x^2 dx\right) = r^2\pi x|_{-r}^{r} - \pi\frac{x^3}{3}\bigg|_{-r}^{r} = r^2\pi(r + r) - \frac{\pi}{3}(r^3 + r^3) =$$

$$= 2r^3\pi - \frac{2r^3\pi}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi.$$



Слика 3.3.1. Лопта полупречника r

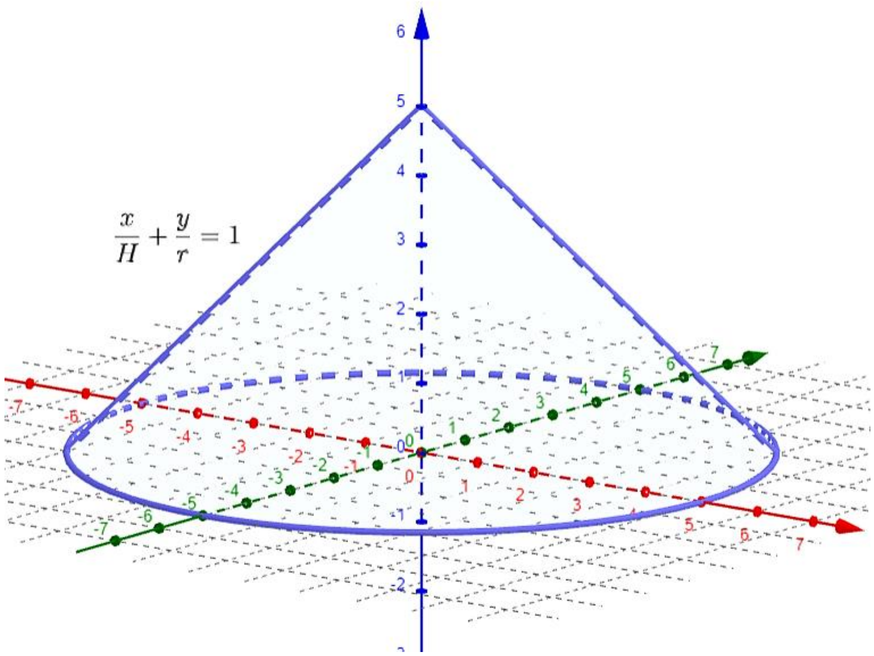
Пример 2. Израчунати запремину праве купе полупречника r и висине H.

Решење.

$$\frac{x}{H}+\frac{y}{r}=1 \implies y=-\frac{r}{H}x+r$$

$V=\pi\int_0^H\left(-\frac{r}{H}x+r\right)^2dx=\pi\int_0^H\left(\frac{r^2}{H^2}x^2+r^2-2\frac{r^2}{H}x\right)dx=\ \pi\left(\int_0^H\frac{r^2}{H^2}x^2dx+\int_0^H r^2dx-\right.$

$\left.-\int_0^H 2\frac{r^2}{H^2}xdx\right)=\pi\left(\frac{r^2}{H^2}\frac{H^3}{3}+r^2H-2\frac{r^2}{H}\frac{H^2}{2}\right)=\pi\left(\frac{Hr^2}{3}+r^2H-r^2H\right)=\pi\ \frac{Hr^2}{3}.$



Слика 3.3.2. Права купа полупречника r *и висине H*

Задатак 1. Наћи запремину тела добијеног ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривама

$y=x^2+1$ и $y=2$.

Решење. Укупну запремину добијамо разликом запремина насталих тела ротацијом: $V=V_1-V_2$.

Решавамо систем, да бисмо добили границе:

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+1 \\ y=2 \end{array}\right\} \implies 2=x^2+1 \implies x^2-1=0 \implies (x-1)(x+1)=0 \implies x=1 \land x=-1;$$

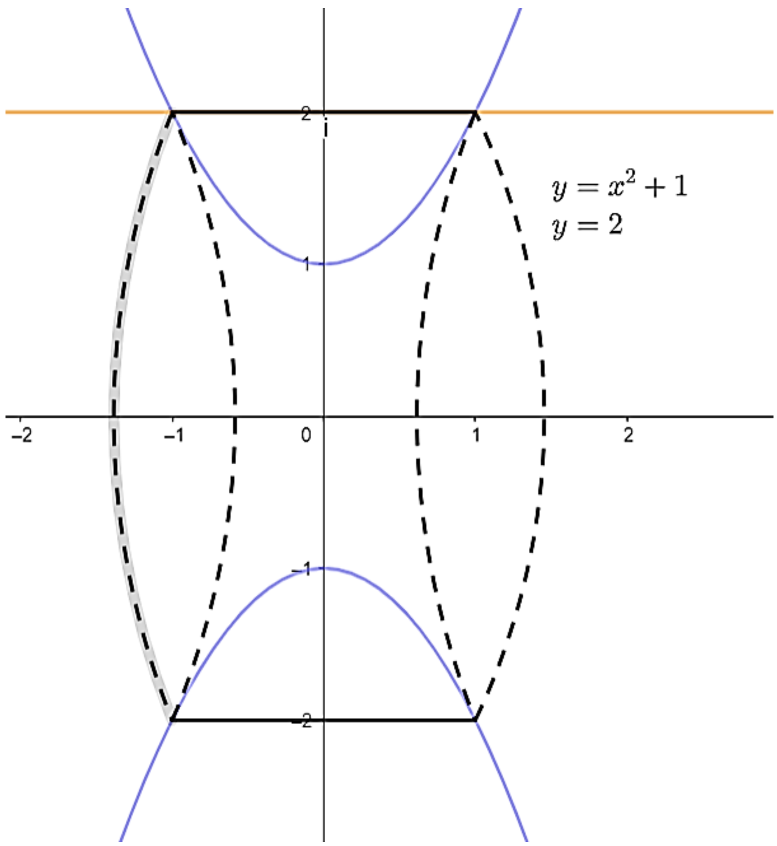
Затим рачунамо појединачно запремине V_1 и V_2:

$V_1 = \pi \int_{-1}^{1} 2^2 dx = 4\pi x|_{-1}^{1} = 4\pi(1+1) = 8\pi;$

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{-1} (x^2+1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{56}{15}\pi.$$

Крајње решење $\quad V = V_1 - V_2 = 8\pi - \frac{56}{15}\pi = \frac{64}{15}\pi.$



Слика 3.3.3. Тело добијено ротацијом око x-осе фигуре ограничене кривама $y = x^2 + 1$ и $y = 2$

Задатак 2. У тачки $P(3,2)$ криве $y^2 = 2(x-1)$ конструисана је тангента. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене овом тангентом датом кривом и x-осом.

Решење. Укупну запремину добијамо разликом запремина насталих тела ротацијом: $V = V_1 - V_2$.

$$V_1 = \pi \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \pi \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) dx = \pi \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} x^2 dx + \pi \frac{1}{2} \int_{-1}^{3^{-1}} x dx + \pi \frac{1}{4} \int_{-1}^{3} dx =$$

$$= \frac{1}{4}\pi \frac{x^3}{3}\bigg|_{-1}^{3} + \frac{1}{2}\pi \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{3} + \frac{1}{4}\pi x\bigg|_{-1}^{3} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{28}{3} + \frac{\pi}{2}\frac{8}{2} + \frac{\pi}{4} \cdot 4 = \frac{7}{3}\pi + 2\pi + \pi = \frac{16}{3}\pi.$$

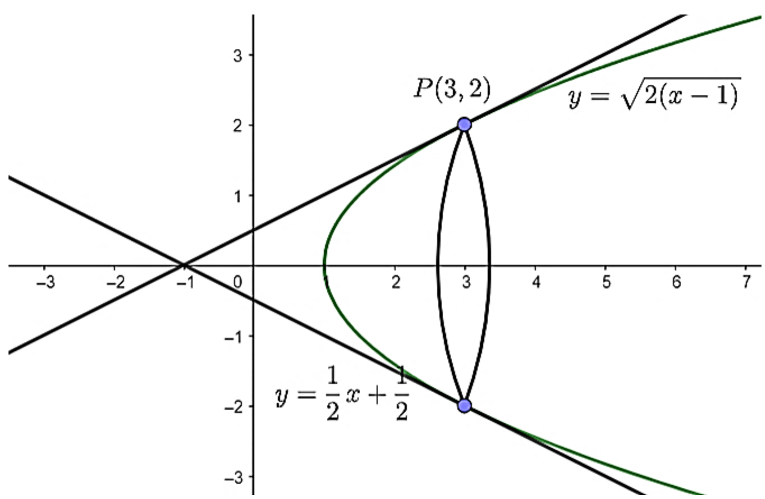
$$V_2 = \pi \int_{1}^{3} 2(x-1) dx = 2\pi \int_{1}^{3} x dx - 2\pi \int_{1}^{3} dx = 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_{1}^{3} - 2\pi x|_1^3 = 8\pi - 4\pi = 4\pi.$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{16\pi}{3} - 4\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Коефицијент правца тангенте добијамо помоћу првог извода: $k = y'(3) = \frac{1}{2}$.

Једначина тангенте: t: $\quad y - 2 = k(x-3)$;

$$t: y - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \implies t: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1.$$



Слика 3.3.4. Тело које настаје ротацијом око x-осе фигуре ограничене о тангентом, датом кривом и x-осом

Задатак 3. Израчунати запремину тела које настаје ротацијом фигуре, ограничене кривама

$y = \ln x, y = \ln^2 x$, око x-осе.

Решење. Укупну запремину добијамо разликом запремина насталих тела ротацијом: $V = V_1 - V_2$.

Решавамо систем, да бисмо добили границе:

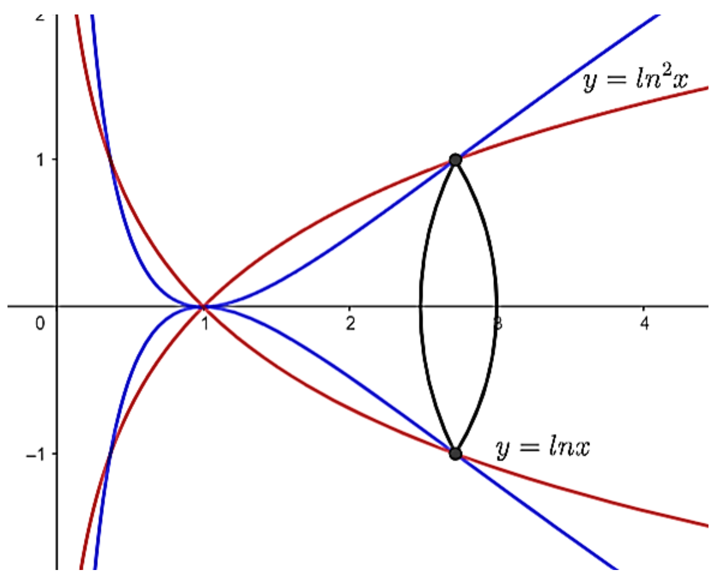
$$\left.\begin{matrix} y = \ln x \\ y = \ln^2 x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ln x = \ln^2 x \Rightarrow \ln x(\ln x - 1) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \lor \ln x = 1 \Rightarrow x = 1 \lor x = 0;$$

Затим рачунамо појединачно запремине V_1 и V_2:

$$V_1 = \pi \int_1^e \ln^2 x dx = \begin{Bmatrix} lnx = t & x = 1 \to t = 0 \\ \dfrac{dx}{x} = dt & x = e \to t = 1 \end{Bmatrix} = \int_0^1 t^2 e^t dt = \begin{Bmatrix} u = t^2 & e^t dt = dv \\ du = 2tdt & e^t = v \end{Bmatrix}$$

$$= t^2 e^t|_0^1 - \int_0^1 2te^t dt = \pi(e-2).$$

$$V_2 = \pi \int_1^e \ln^4 x dx = \pi(9e - 24) \Rightarrow V = \pi(e-2) - \pi(9e-24) \Rightarrow V = (e - 2 - 9e + 24) - \pi(22 - 8e).$$



Слика 3.3.5. Тело које настаје ротацијом фигуре, ограничене кривама $y = lnx, y = ln^2x$ око x-осе

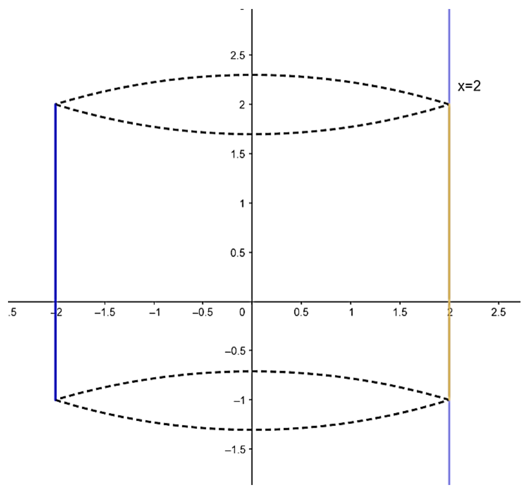
3.4. Површина обртног тела

Површина површи која се добија ротацијом глатке криве AB око осе Ox, једнака је

$P = 2\pi \int_A^B |y|\, dl$, где је dl диференцијал лука.

<u>*Пример 1.*</u> Права $x = 2$ ротира око Oy осе, $y \in [-1,2]$. Израчунати површину омотача насталог тела.

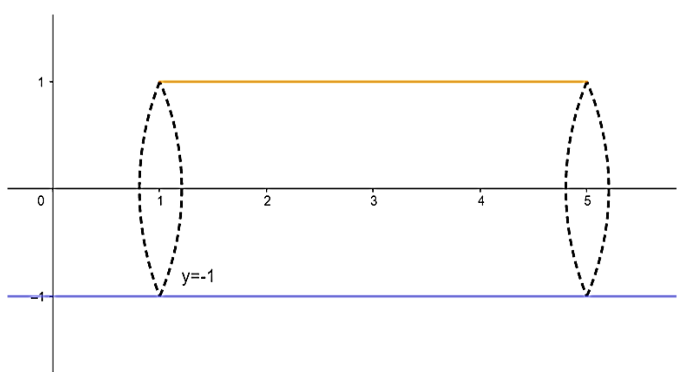
<u>*Решење.*</u> $M = 2\pi \int_{-1}^{2} 2\sqrt{1+0^2}\, dx = 4\pi x|_{-1}^{2} = 4\pi(4+2) = 12\pi.$



Слика 3.4.1. Ваљак настао ротацијом праве око y осе

<u>*Пример 2.*</u> Права $y = -1$ ротира око Ox осе, $x \in [1,5]$. Израчунати површину омотача насталог тела.

<u>*Решење.*</u> $M = 2\pi \int_{1}^{5} 1\sqrt{1+0^2}\, dx = 2\pi x|_{1}^{5} = 2\pi(5-1) = 8\pi.$



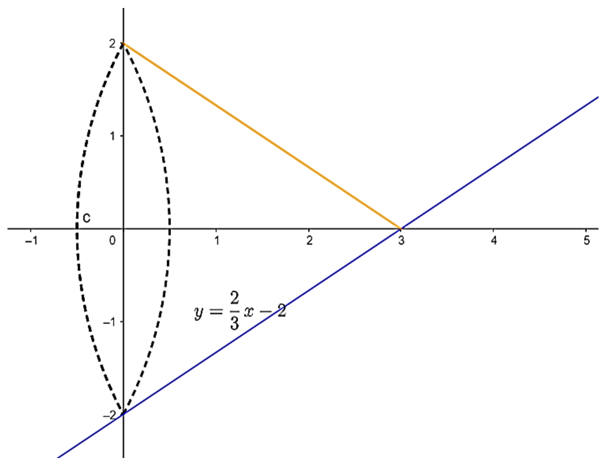
Слика 3.4.2. Ваљак настао ротацијом око x осе

Пример 3. Права $y = \frac{2}{3}x - 2$ ротира око Ox осе, $x \in [0,3]$. Израчунати површину омотача насталог тела.

Решење.

$$M = 2\pi \int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2\right)\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}\, dx = 2\pi\sqrt{1 + \frac{4}{9}} \int_0^3 \left(-\frac{2}{3}x + 2\right) dx = 2\pi \frac{\sqrt{13}}{3}\left(-\frac{2}{3}\frac{x^2}{2} + +2x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= 2\pi \frac{\sqrt{13}}{3}\left(\frac{2}{3}\frac{9}{2} + 6\right) = 2\pi \frac{\sqrt{13}}{3} 3 = 2\pi\sqrt{13}.$$



Слика 3.4.3. Купа настала ротацијом око x осе

Задатак 1. Наћи површину повши која се добија ротацијом $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq x_0$:

a. око осе Ox;

b. око осе Oy.

Решење.

a. Диференцирањем имамо $2yy' = 2p$, одакле је $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$;

$$P \quad = 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px}\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\pi\sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{p + 2x}\, dx = 2\pi\sqrt{p} \int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}} z^2\, dz = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3} z^3 \Bigg|_{\sqrt{p}}^{\sqrt{p+2x_0}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left((p + 2x_0)\sqrt{p^2 + 2px_0} - p^2\right).$$

b. Узимајући у обзир симетрије дате криве у односу на осу Ox имамо:

$$P = 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} x(y)\sqrt{1+\left(x'(y)\right)^2}dy = \frac{2\pi}{p}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy = \frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2+y^2}dy =$$

$$= \frac{2\pi}{p^2}\left(\frac{y(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{p^2}{8}\left(y\sqrt{p^2+y^2} + p^2\ln\left(y+\sqrt{p^2+y^2}\right)\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}}.$$

Заменом доње и горње границе, сређивањем израза добијамо:

$$P = \frac{\pi}{4}\left((p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)} - p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right).$$

Задатак смо решили парцијалном интеграцијом $u = y; dv = y\sqrt{p^2+y^2}dy$ и применом Њутн-Лајбницове формуле.

4. Фигуре у параметарском и поларном облику

4.1. Површина равне фигуре

1^0 Површина равне фигуре, ограничене кривом, која је задата у параметарском облику.

Ако су $x = x(t), y = y(t), [0 \leq t \leq T]$ параметарске једначине део по део глатке просто затворене криве C, орјентисане у смеру супротном кретању казаљке на сату и ограничавајући слева од себе површину S, онда је:

$$S = -\int_0^T y\,(t)x'(t)dt = \int_0^T x\,(t)y'(t)dt \text{ или } S = \frac{1}{2}\int_0^T \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

2^0 Површина у поларним координатама.

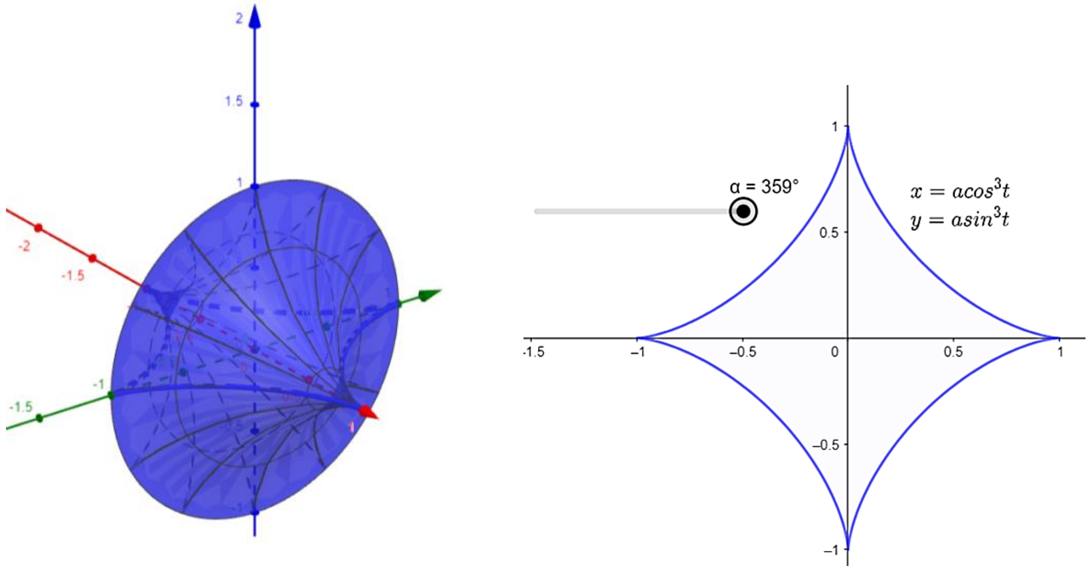
Површина S равне фигуре OAB, ограничена графиком непрекидне функције $\rho = \rho(\varphi)$ и двема полуравнима $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta(\alpha < \beta)$, једнака је:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,(\varphi)d\varphi.$$

<u>*Задатак 1.*</u> Наћи површину повши која се добија ротацијом $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ око осе Ox.

<u>*Решење.*</u> Параметарске једначине астроиде имају облик $x = a\cos^3 t; y = a\sin^3 t;\ (0 \leq t \leq 2\pi)$, тада је $dl = 3a|\mathrm{sin}t\mathrm{cos}t|dt$. Узимајући у обзир симетричност криве у односу на обе координатне осе, имамо:

$$P \quad = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,(t)dl(t) = 12\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d(\mathrm{sin}t) = \frac{12}{5}\pi a^2 \sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12}{5}\pi a^2.$$



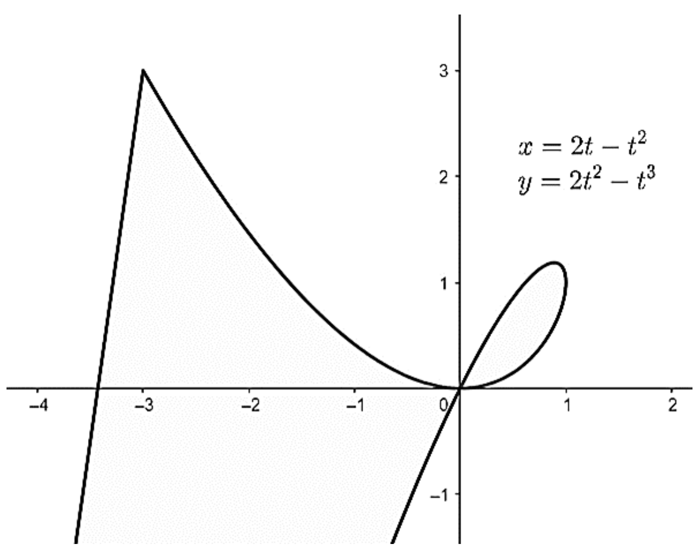
Слика 4.1.1. Фигура која настаје ротацијом астроидае око $0x$ осе

<u>*Задатак 2.*</u> Наћи површину фигуре ограничене кривама које су дате параметарски

$x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3.$

<u>*Решење.*</u> Крива сама себе сече у координатном почетку: $x = 0$ за $t = 0$ і $t = 2$; $y = 0$ такође за $t = 0$ и $t = 2$. За израчунавање површине користићемо формулу:

$$S \quad = \frac{1}{2}\int_0^2 \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^2 = 4\left(\frac{4}{3} - 2 + \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}.$$



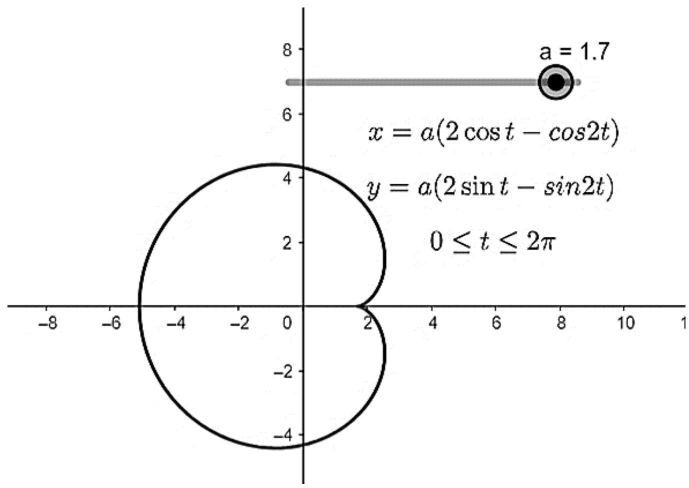
Слика 4.1.2. Фигура ограничена кривама које су дате параметарски $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$

Задатак 3. Наћи површину фигуре ограничене кривама које су дате параметарски

$x = a(2\cos t - \cos 2t); y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

Решење. Фигура је ограничена и затворена $(x(0) = x(2\pi); y(0) = y(2\pi))$, следи:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\,dt = a^2\int_0^{2\pi}(3 - 3\cos t)\,dt = 6\pi a^2.$$



Слика 4.1.3. Фигура ограничена кривама које су дате параметарски $x = a(2cost - cos\,2t)$,
$y = a(2sint - sin\,2t)$

Задатак 4. Наћи површину фигуре задате поларним координатама $\rho = a(1 + cos\varphi)$ *(кардиоида).*

Решење. Фигура је симетрична у односу на праву $\rho\sin\varphi = 0$, зато је:

$$S = \int_0^{\pi} a^2\,(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Задатак 5. Наћи површину фигуре задате поларним координатама $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$ (парабола); $\varphi = \frac{\pi}{4}; \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Решење. Помоћу формуле 2^0 налазимо:

$$\mathrm{S} = \frac{p^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1 + \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{p^2}{4}\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\mathrm{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{p^2}{4}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^3 - 1\right)\right) = \frac{p^2}{12}(8\sqrt{2} + 6) = \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2} + 3).$$

4.2. Дужина лука криве

1^0 Дужина лука криве дате параметарски.

Ако је крива дата једначинама $x = x(t), y = y(t)\ (t_0 \leq t \leq T)$, где су x, y непрекидно диференцијабилне функције на сегменту $[t_0, T]$, онда је дужина L лука криве једнака:

$$L = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

2^0 Дужина лука криве дате у поларним координатама.

Ако је $\rho = \rho(\varphi)(\alpha \leq \varphi \leq \beta)$, где је ρ непрекидно диференцијабилне функција на сегменту $[\alpha, \beta]$, онда је дужина L одговаеакићег лука криве:

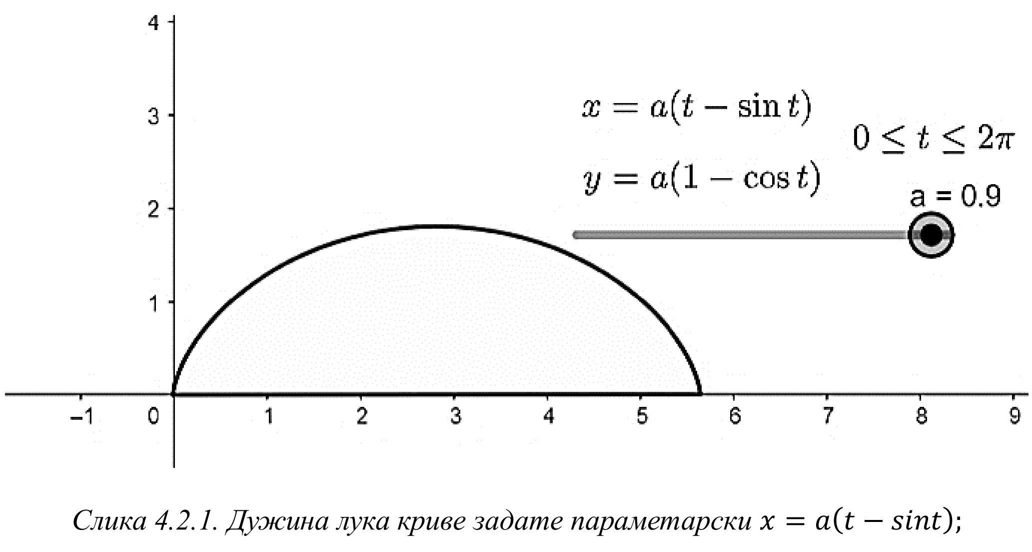
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Задатак 1. Наћи дужину лука криве задату параметарски $x = a(\mathrm{t} - \sin t); y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решење. Примењујемо формулу 2^0 , самим тим рачунамо $x'(t) = a(1 - \cos t)$,

$\mathrm{y}'(t) = a\sin t$; $x'^2(t) + y^2(t) = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$:

$$L = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{a} \sin z dz = 4a\cos z|_0^{\pi} = 8a.$$



Слика 4.2.1. Дужина лука криве задате параметарски $x = a(t - sint)$;

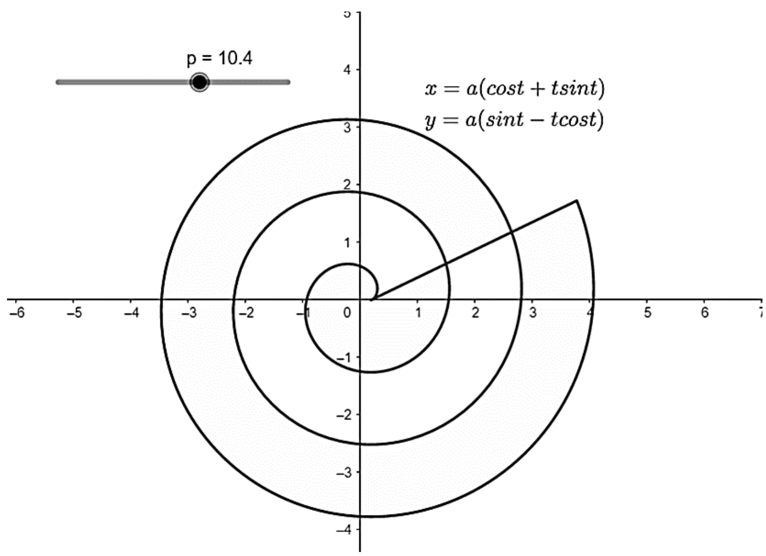
$y = a(1 - cos\,t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

Задатак 2. Наћи дужину лука криве задату параметарски $x = a(\cos t + t\sin t); y = a(\sin t - t\cos t)$ за $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решење. Примењујемо формулу 2^0 , самим тим рачунамо $x'(t) = at\cos t; y'(t) = at\sin t;$

$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2t^2$:

$$L = a\int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{at^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a.$$



Слика 4.2.2. Дужину лука криве задату параметарски $x = a(cost + tsint); y = a(sint - tcost)$ за

$0 \leq t \leq 2\pi$

Задатак 3. Наћи дужину лука криве задату поларним координатама $\rho = a\varphi$ (*Архимедова спирала*) $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

Решење. Крива је задата у поларним координатама за налажење дужине лука користимо формулу 2^0:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right). \end{aligned}$$

Задатак 4. Наћи дужину лука криве задату поларним координатама $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Решење. Крива је затворена ако φ расте од 0 до 3π, она пролази из координатног почетка и враћа се у њега. Дакле, $L = \int_0^{3\pi} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'(\varphi)^2}\, d\varphi = a\int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{a}{2}\int_0^{3\pi}\left(1 + \cos 2\frac{\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{3\pi a}{2}$.

5. Одређени интеграл - примена у свакодневном животу

Одређени интеграли су математички концепт који има широку примену у различитим областима живота. Ови интеграли се користе за израчунавање површина, волумена, средњих вредности функција, као и за решавање проблема из физике, економије, биологије и других научних дисциплина. У овом делу рада ћемо истражити примене одређених интеграла у свакодневном животу и како они помажу у разумевању и анализи различитих квантитативних феномена. Кроз примере и објашњења, откријемо како дефинитни интеграли играју кључну улогу у разним ситуацијама, пружајући нам алат за квантитативно разумевање света око нас.

5.1. Рачунање запремине

Задатак 1. Лубеница има елипсоидни облик са великом осом 28 cm и малом осом 25 cm. Пронађите њену запремину.

Решење. Пре рачунања, један од начина за апроксимацију запремине био би да исечете лубеницу (рецимо на кришке дебљине 2 cm) и саберете запремине сваке кришке користећи $V = \pi r^2 h$. Занимљиво је да је Архимед користио овај приступ да пронађе запремине сфера око 200. године пре нове ере. Техника је била скоро заборављена све до раних 1700-их када су Њутн и Лајбниц развили рачун. Видећемо како решавамо проблем користећи оба приступа.

Пошто је лубеница симетрична, можемо израчунати запремину једне половине лубенице, а затим удвостручити наш одговор. Радијуси за кришке за једну половину одређене лубенице налазе се из мерења као:

0, 6,4, 8,7, 10,3, 11,3, 12,0, 12,4, 12,5.

Приближна запремина једне половине лубенице користећи кришке дебљине 2 cm била би:

$$V_{1/2} = \pi \cdot [6{,}4^2 + 8{,}7^2 + 10{,}3^2 + 11{,}3^2 + 12{,}0^2 + 12{,}4^2 + 12{,}5^2] \cdot 2 = \pi \cdot 8040{,}44 \cdot 2 = 5054{,}4.$$

Дакле, запремина за целу лубеницу је приближно:

$$5054{,}4 \cdot 2 = 10109 \text{ cm}^3 = 10{,}1l\,.$$

У следећем питању, видимо како да пронађемо „тачну“ вредност користећи запремину чврсте формуле револуције.

Речено нам је да је лубеница елипсоид. Треба да нађемо једначину елипсе попречног пресека са великом осом 28 cm и малом осом 25 cm.

Користимо формулу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ где је a половина дужине главне осе, а b половина дужине мање осе.

За формулу запремине биће нам потребан израз за y^2 и то је сада лакше решити (пре него што заменимо наше a и b).

$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ јер је $a=14, b=12{,}5$

$y^2=\frac{12{,}5^2}{14^2}(14^2-x^2)=0{,}797(196-x^2)$.

Користећи ово, сада можемо пронаћи волумен помоћу интеграције.

$V_{1/2}=\pi\int_0^{14} y^2\,dx=\pi\int_0^{14} 0{,}797(196-x^2)\ =2{,}504\left(196x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{14}=2{,}504\left(196(14)-\frac{14^3}{3}\right)=$ $2{,}504\cdot 1829{,}33=4580{,}65\ \mathrm{cm}^3$.

Дакле, укупна запремина лубенице је $2\cdot 4580{,}65=9161\mathrm{cm}^3$.

Задатак 2. Наћи запремину прстена ако је изнутра раван и ширине 1cm, а споља параболичан и максималне ширине (од центра) 1,2cm, а минималне 1,1 cm. Ширина прстена је 6mm.

Решење. Користимо формулу запремине $V=\pi\int_a^b({y_1}^2-{y_2}^2)\,dx$.

$y_1=1, 4p(y_2-k)=(x-h)^2$,

узмемо да је $h=0,\ k=1.2\ \Rightarrow 4p(y-1.2)=x^2\Rightarrow p=\frac{x^2}{4(y-1.2)}$.

Парабола пролази кроз тачку (0.3, 1.1) $\Rightarrow p=\frac{0.3}{4(1.1-1.2)}=-0.225\Rightarrow y_2=k+\frac{x^2}{4p}=1.2-\frac{x^2}{0.9}$.

Запремина је сума запремина прстенова, спољњег пречника y_2 и унутрашњег y_1.

$$V = \pi \int_{-0,3}^{0,3} \left(\left(k + \frac{x^2}{4p} \right)^2 - 1 \right) dx$$

$$= \pi \int_{-0.3}^{0.3} \left(k^2 + \frac{2k}{4p} x^2 + \frac{1}{16p} x^4 - 1 \right) dx = \pi \left(k^2 x + \frac{2k}{4p} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{16p} \frac{x^5}{5} - x \right) \Bigg|_{-0.3}^{0.3}$$

$$= \frac{2400000\pi k^2 p + 36000\pi k + 243\pi - 2400000\pi p}{40000000p}.$$

5.2. Момент инерције

Инертност тела код ротационог кретања зависи од масе, али и од распореда масе у односу на осу ротације. Стога се уводи нова величина за описивање инертности тела при ротационом кретању: момент инерције.

Дефиниција 1. Момент инерције је мера инертности тела при ротационом кретању.

Дефиниција 2. Момент инерције материјалне тачке у односу на неку осу једнак је производу масе и квадрата удаљености материјалне тачке од те осе:

$$I = mr^2.$$

Мерна јединица за момент инерције је $1kgm^2$ (килограм пута метар на квадрат).

Моменти инерције неких правилних геометријских тела:

1) хомогеног диска (ваљка) $I = \frac{1}{2} mR^2$;

2) хомогеног штапа $I = \frac{1}{12} ml^2$;

3) хомогене кугле $I = \frac{2}{5} mR^2$.

<u>Задатак 1.</u> Одредити момент инерције танке квадратне плоче ивице $a = \sqrt{2}$ која ротира око $y-$ осе ако је она од $y-$ осе удаљена 1 cm , а од $x-$ осе 2cm. Маса плоче је m.

<u>Решење</u>. Формула по којој рачунамо момент инерције је $I_y = \sigma \int_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx$.

$y_1 = 1, y_2 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow a = 1, b = 1 + \sqrt{2}$

$$I_y = \sigma \int_1^{1+\sqrt{2}} x^2\left(2+\sqrt{2}-2\right)dx = \sigma \int_1^{1+\sqrt{2}} x^2\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\sigma \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{3}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^3 - 1\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\sigma}{3}\left(6+5\sqrt{2}\right) = \sigma\left(2\sqrt{2} + \frac{10}{3}\right).$$

$m = \sigma \cdot S = \sigma\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\sigma \Rightarrow \sigma = \frac{m}{2}.$

$I_y = \frac{m}{2}\left(2\sqrt{2} + \frac{10}{3}\right) = m\left(\sqrt{2} + \frac{5}{3}\right).$

<u>Задатак 2.</u> Одредити момент инерције фигуре уовичене правама $y = x, y = x + 2, y = -x + 4,$ $y = -x + 6$ у односу на y-осу.

<u>Решење</u>.

$$I_y = \sigma \int_a^b x^2(y_2 - y_1)\,dx$$

$$ds = (y_2 - y_1)dx,\ dm = \sigma\,(y_2 - y_1)dx$$

$$I = \int dI = \int_a^b \sigma x^2 (y_2 - y_1)\,dx$$

$$y_2 = \begin{cases} x + 2, & x\epsilon(1,2) \\ -x + 6, & x\epsilon(2,3) \end{cases} \quad y_1 = \begin{cases} x, & x\epsilon(2,3) \\ -x + 4, & x\epsilon(1,2) \end{cases}$$

граница a: пресек $y = x + 2$ и $y = -x + 4$, $x = 1$

граница b: пресек $y = x$ и $y = -x + 6$, $x = 3$

пресечне тачке c и d су на $x = 2$

Коначно:

$$I=\sigma\int_1^2 x^2\big(x+2-(-x+4)\big)\,dx+\sigma\int_2^3 x^2\big(x+2-(-x+4)\big)\,dx=$$

$$=\sigma\int_1^2 x^2(2x-2)\,dx+\sigma\int_2^3 x^2(-2x+6)\,dx=\sigma\int_1^2 2x^3\,dx-2\sigma\int_1^2 x^2\,dx-2\sigma\int_2^3 x^3\,dx+6\sigma\int_2^3 x^2\,dx=$$

$$=2\sigma\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2-2\sigma\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2-2\sigma\frac{x^4}{4}\bigg|_2^3+6\sigma\frac{x^3}{3}\bigg|_2^3=\frac{15\sigma}{2}-\frac{14\sigma}{3}-\frac{65\sigma}{2}+38\sigma=\frac{25}{3}\sigma\Rightarrow I=\frac{25}{3}\sigma.$$

$$\sigma=\frac{m}{s}\ \Rightarrow S=\int_1^2(x+2+x-4)\,dx+\int_2^3(-2x+6)\,dx=2\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2-2x|_1^2-2\frac{x^2}{2}\bigg|_2^3+6x|_2^3=3-2-5+6=2.$$

$$\sigma=\frac{m}{2}\Rightarrow I=\frac{25}{3}\frac{m}{2}=\frac{25}{6}m.$$

6. Додатни задаци за израду

Задатак 1. Одређени интеграл као лимес збира $\int_{-1}^{2} x^2\, dx$.

Решење.

$$S_n = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-1+\frac{3i}{n}\right)^2 = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}\right) = \frac{3}{n}\left(n-\frac{3(n-1)}{2n}\right),$$

$$\int_{-1}^{2} x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 3.$$

Задатак 2. Одређени интеграл као лимес збира $\int_0^1 a^x\, dx$.

Решење.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} a^{\frac{i}{n}} = \frac{a-1}{n\left(a^{\frac{i}{n}}-1\right)},$$

$$\int_0^1 a^x\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a-1}{\ln a}.$$

Задатак 3. Одређени интеграл као лимес збира $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$.

Решење.

$$S_n = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\frac{i\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{(n-1)\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Задатак 4. Наћи изводе:

a. $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(-a - \sin a \cdot \cos a + b - \sin b \cdot \cos b)\right) = 0.$

Прво морамо да израчунамо интеграл, заменимо границе и након тога да радимо извод добијеног резултата по x. Можемо приметити да израз не зависи од променљиве x и због тога је резлтат 0.

b. $\frac{d}{da}\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}(-a - \sin a \cdot \cos a + b - \sin b \cdot \cos b)\right) = -\sin a^2.$

Поновимо поступак као у претходном примеру и након тога рачунамо извод по променљивој a, део израза који зависи од променљиве b се посматра као константа. Сходно томе је резултат $-\sin a^2$.

c. $\frac{d}{db}\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{d}{db}\left(\frac{1}{2}(-a - \sin a \cdot \cos a + b - \sin b \cdot \cos b)\right) = \sin b^2.$

Код овог примера је сличан поступак као у претходном, осим што део са променљивом a посматрамо као константу и резултат је $\sin b^2$.

Задатак 5. Наћи лимесе:

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$;

b. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$.

Решење. У оба случаја примењујемо Лопиталово правило, рачунамо извод по промељивој x. Након тога израчунамо интеграл и пустимо лимес да тежи ка нули.

a. $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{d}{dx}\int_0^x \cos t^2 dt = \lim_{x\to 0} \cos x^2 = 1.$

b. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\frac{d}{dx}\int_0^x e^{2t^2} dt} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2} dt} =$

$= 2\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{d}{dx} e^{x^2}} = 2\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 2\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x} = 0.$

Задатак 6. Наћи интеграле:

a. $\int_0^2 f(x)\,dx$, ако је $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b. $\int_0^1 f(x)\,dx$, ако је $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t \\ t\,\frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Решење. Примећујемо да је фукција другачије дефинисана у односу на интервал коме припада. Из тог разлога се интеграл дели на збир два интеграла, појединачно се израчуна, замене се границе и саберу решења.

a. $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x\,)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{5}{6}$.

Задатак 7. Ако је f непрекидна функција на $[0,1]$, онда је:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(\cos x)dx$;

b. $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\,(\sin x)dx$. Доказати.

Решење.

a. Због $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, следи:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \left\{\frac{\pi}{2} - x = t;\ dx = \ dt\right\} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\,(\sin t)dt.$$

b. Транформацијом:

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx = \int_0^{\pi} x\,f\big(\sin(\pi - x)\big)dx$$

и сменом $\pi - x = t$, добијамо:

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx = \int_0^{\pi} (\pi - t)\,f(\sin t)dt = \pi\int_0^{\pi} f\,(\sin t)dt - \int_0^{\pi} t\,f(\sin t)dt,$$

одавде следи $\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f\,(\sin x)dx$.

Задатак 8. Израчунати одређене интеграле од ограничених прекидних функција:

a. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx$;

b. $\int_0^\pi x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)dx$.

Решење.

a. Како је $\operatorname{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & 1 < x \leq 3 \\ 0, & x = 0, x = 1 \end{cases}$

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3)dx = \int_0^1 d\,x - \int_1^3 d\,x = 1 - 2 = -1.$$

b. Подинтегрална функција је ограничена и прекидна у тачки $x = \frac{\pi}{2}$, зато је:

$$\int_0^\pi x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,dx = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

7. Закључак

Кроз систематичну анализу примене одређеног интеграла на израчунавање површина, запремина и централних момената тела, овај рад истиче кључне везе између теорије и практичних проблема у физици и геометрији. Допринос овог рада електронским лекцијама, не само да омогућава ученицима интерактивно учење, него и наглашава њихову могућност да самостално истражују и разумеју математичке концепте, чиме се ствара снажна основа за дубље разумевање градива. Овај рад у облику електронских лекција представља велики корак ка унапређењу образовних приступа, обезбеђује инклузивно окружење где ученици могу развијати своје математичке вештине и интуицију на индивидуални начин и сопственим темпом. Тиме се може постићи да ученици буду мотивисани и ангажовани, што доводи до повећане ефикасности учења и бољег разумевања математичких појмова.

Овај рад је показао да одређени интеграл има широку примену у различитим гранама математике и другим наукама. Његова основна примена је у рачунању површина равних фигура и дужина кривих. Једна од најзначајнијих примена одређеног интеграла је у рачунању површине и запремине обртних тела, што је у раду показано кроз различите примере. Важно је нагласити да разумевање и примена одређеног интеграла није ограничена само на математичка израчунавања, већ има и шире значење у развијању апстрактног размишљања, логике и аналитичких вештина код ученика. Кроз ову област математике, ученици могу стећи способност моделирања реалних проблема и примене математичких метода за њихово решавање.

У раду смо посебно истакли значај програма ГеоГебра у настави математике. Овај програм омогућава визуализацију и експериментисање са математичким функцијама и концептима, што помаже ученицима да боље схвате апстрактне идеје и унапреде своје вештине у решавању проблема. ГеоГебра такође може помоћи ученицима да препознају практичне примене математике у стварном свету, што их додатно мотивише да стекну дубље разумевање градива.

8. Литература

1. Н. Чалуковић, *Физика 1 : уџбеник за први разред гимназије*, Београд : Круг, 2021, 142-143
2. Ж. Ивановић и С. Огњановић, *Математика 4 : збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа*, Београд : Круг, 2005.
3. М. Обрадовић, *Математика: са збирком задатака : за IV разред средње школе : гимназија (природно-математички смер и општи тип) и за подручја рада*, Београд : Завод за уџбенике, 2011.
4. И. И. Љашко, А. К. Бољарчук, Ј. Г. Г. Гај, Г. П. Головач, *Збирка задатака из математичке анализе - први део*, Београд : Наша Књига Д.О.О., 2007.
5. M. Bourne, *"Applications of Integration."* Intmath.com, 2016, www.intmath.com/applications-integration/applications-integrals-intro.php.
6. Ђ. Кртинић, *Математика 4+: Решени задаци са пријемних испита на Универзитету у Београду*, 2014-2020.
7. Званични сајт ГеоГебре, https://www.geogebra.org/